



**AGRICULTURAL RESEARCH INSTITUTE'**  
**PUSA**





# ACTA AGRICULTURÆ SUECANA

VOL. II



KUNGL. LANTBRUKSAKADEMIE  
THE ROYAL SWEDISH ACADEMY OF AGRICULTURE  
STOCKHOLM 1946 - 1947



## ACTA AGRICULTURÆ SUECANÆ

a periodical devoted to the publication of original research in agriculture — is published by the Royal Swedish Academy of Agriculture. All contributions are written in English, French or German, illustrated when necessary, with adequate text figures and plates. Each volume contains about 300 pages, issued in three numbers.

Subscriptions should be sent to the Royal Swedish Academy of Agriculture — Kungl. Lantbruksakademien — Stockholm. Price Twenty Swedish Kronor per volume. Postage free.

### EDITOR

Professor R. Torssell

### EDITORIAL COMMITTEE

Professor G. Bonnier

Director-in-chief E. Höijer

Professor T. Lagerberg

Ph. Dr. H. Lundin

Professor V. Sahlstedt

## Contents.

	Page
BONNIER, GERT, HANSSON, ARTUR & JARL, FOLKE: Studies in the Variations of the Calory Content of Milk	159
--- & HANSSON, ARTUR: Studies on Monozygous Cattle Twins VII: On the genetical Determination of the Interdependency between the Percentages of Fat, Protein, and Lactose in the Milk	171
CHILDS, E. C.: A Note on Dr. Yngve Gustafsson's Paper: »Untersuchungen über die Strömungsverhältnisse in gedräntem Boden» . . . . .	353
ENEBO, L.: The Biological Processes in the Warm-Water Retting of Flax . . . . .	319
ERIKSSON, BIRGER & SÄVERBORN, SIGURD: Some Electron microscopic Investigations of the Fine Structure of the Flax Fibre	233
GUSTAFSSON, YNGVE: Untersuchungen über die Strömungsverhältnisse in gedräntem Boden	1
HANSSON, ARTUR & BONNIER, GERT: Studies on Monozygous Cattle Twins VIII: Amount and Composition of the Milk as affected by Frequency of Milkings . . . . .	311
KORKMAN, NILS: Causes of Variation in the Size and Weight of Litters from Sows . . . . .	253
MATTSON, SANTE: The Cookability of Yellow Peas . . . . .	185
ÅKERBERG, E. & LESINS, K.: The Importance of Honey Bees for the Seed Set in Alfalfa . . . . .	249



# Untersuchungen über die Strömungsverhältnisse in gedrängtem Boden

Von YNGVE GUSTAFSSON

Aus dem Institut für agronomische Hydrotechnik der Kgl. Landwirtschaftlichen  
Hochschule, *Uppsala*.

## Vorwort.

In dem Augenblicke, da diese Abhandlung der Öffentlichkeit vorgelegt wird, ist es mir eine angenehme Pflicht, allen denen, die mich bei der ihr zugrunde liegenden Arbeit unterstützt haben, meinen Dank auszusprechen.

In erster Hand wende ich mich dabei an Herrn Professor HERMAN FLODKVIST an der Kgl. Schwedischen Landwirtschaftl. Hochschule, der seit 12 Jahren mein Lehrer und seit 9 Jahren auch mein Chef ist. Meine Untersuchungen, die in gewissem Sinne als Fortsetzung seiner eigenen grundlegenden hydrologischen Forschungen zu betrachten sind, haben ihr Zustandekommen teilweise seiner Initiative zu danken, und im Laufe der Arbeit war ich in der Lage, von ihm immer wieder neue Anregungen zu erhalten. Auch materiell hat mir Prof. FLODKVIST unschätzbare Förderung zuteil werden lassen, indem ich die Erlaubnis erhielt, die Arbeit in seinem Institut auszuführen und dabei die verschiedenen Hilfsmittel desselben auszunützen. In meiner Arbeit habe ich weiter von mehreren Kollegen und Studiengenossen Hilfe und Unterstützung erhalten. Besonderen Dank richte ich dabei an agr. lic. GUNNAR HALLGREN, der meiner Untersuchung mit grossem Interesse gefolgt ist und sie durch Gedankenaustausch und fruchtbringende Diskussionen gefördert hat, und weiter an Agronom GUNNAR ERNEST, der mir bei den experimentellen Arbeiten behilflich war. Für Ratschläge und Auskünfte in Fragen rein mathematischer Art bin ich dem Dozenten an der Universität Uppsala, HARALD BERGSTRÖM, zu Danke verpflichtet. Weiter danke ich Lektor Dr. phil. ALFRED WOLF, der das Manuskript ins Deutsche übersetzt hat, sowie dem Sekretär der Kgl.

Schwedischen Landwirtschaftlichen Akademie Prof. ROBERT THORSELL, dessen wertvolle Hilfe der Redigierung der Abhandlung zugute kam. Schliesslich wendet sich mein Dank an Agronom EMANUEL ERIKSSON, von dessen Hand mehrere gezeichneten Abbildungen stammen, sowie an Frau ANNA-LISA RYDBERG, die alle mit der Reinschrift zusammenhängenden Arbeiten ausgeführt hat.

Als Letztes bleibt mir noch übrig den verschiedenen wissenschaftlichen Instituten, die durch ökonomische Beihilfe meine Arbeit gefördert haben, meinen ergebenen Dank auszusprechen.

Uppsala, im Januar 1946.

*Yngve Gustafsson.*

## I. Einleitung.

Der Zweck einer jeden Wasserregulierung in kultiviertem Boden ist, möglichst gute Wachstumsbedingungen für die Kulturpflanzen zu schaffen, soweit es auf das Wasser ankommt. Zwei verschiedene Arten von Regulierungsmassnahmen können dabei in Frage kommen, nämlich teils die Zufuhr des für die Pflanzen notwendigen Wassers, teils das Wegschaffen des den Pflanzen schädlichen Wassers. Die erste Massnahme nennen wir Bewässerung, die zweite Entwässerung.

Welche dieser beiden Hauptmassnahmen in einem bestimmten Falle Platz greifen soll, wird von den herrschenden meteorologischen, topographischen und pedologischen Verhältnissen sowie von der Einrichtung des Pflanzenbaues bestimmt. Sieht man auf die Erde als ganze, so dürfte Bewässerung häufiger vorkommen als Entwässerung und dürfte auch für die Lebensmittelversorgung der Menschheit eine grössere Rolle spielen als diese. Beschränken wir uns dagegen darauf, die Verhältnisse nur in den gemässigten und kalten Zonen zu betrachten, so ist die Entwässerung die vorherrschende Massnahme, auch wenn Bewässerung hier mitunter als eine wichtige Ergänzung derselben vorkommen kann.

Wir können innerhalb der Entwässerungstechnik zwei Arten von Massnahmen unterscheiden, obwohl die Grenze zwischen ihnen keineswegs scharf ist. Wir können teils von Teilentwässerung, teils von Hauptentwässerung sprechen. Unter Teilentwässerung verstehen wir die Massnahmen, die als erste wesentliche Folge die Ableitung des Wassers aus dem bebauten Boden ergeben. Unter Hauptentwässerung verstehen wir die Ableitung des Wassers aus den Teilentwässerungssystemen.

Die Teilentwässerung — dies ist das Thema, an das wir uns im weiteren halten wollen — wurde in älteren Zeiten, d. h. vor den fünfziger Jahren des 19. Jahrhunderts, hauptsächlich durch Anlegen eines Systems offener Teilgräben durchgeführt, u. zw. von der Art, wie man sie noch in gewissen Teilen Finnlands und Schwedens, z. B. in der Gegend südlich von Umeå, findet. Neben der Entwässerung durch offene Gräben kam es zwecks Ableitung des Wassers aus dem Boden in geringerem Ausmasse vor, dass unterirdische Entwässerungszüge aus Stein, Holz

oder Torf in den Boden eingebaut wurden. Diese weniger angewandte Methode trat indessen allmählich immer stärker in den Vordergrund, zunächst indem man gegen die Mitte des 19. Jahrhunderts, Anregungen aus England folgend, Ziegel als Leitungsmaterial anzuwenden begann. Seit dieser Zeit ist die Ziehung eingedeckter Gräben oder die Dränung, wie sie späterhin genannt wird, aus verschiedenen Gründen immer mehr die vorherrschende Methode für die Teilentwässerung geworden und dominiert gegenwärtig völlig.

Die Dränung des Bodens ist, ebenso wie jede andere auf Bodenverbesserung abzielende Tätigkeit, mit beträchtlichen Kapitalinvestierungen verbunden. Als Beispiel kann angeführt werden, dass die Kosten der Dränungen, die in Schweden im Jahre 1939 mit staatlicher Unterstützung ausgeführt wurden, auf durchschnittlich 320 Kr./ha berechnet wurden (KUNGL. LANTBRUKSSTYRELSEN 1940). Zieht man in Betracht, dass zu derselben Zeit der Kaufwert des schwedischen Ackerbodens kaum 1000 Kr./ha überstiegen haben dürfte, so ist dieser Betrag beträchtlich. Nach der im Jahre 1937 in Schweden durchgeführten Landbaustatistik waren 27,9 % der Ackerfläche des Landes oder 1 066 300 ha gedrönt. (Sveriges officiella statistik 1937, HALLGREN 1942.) Wenn die durchschnittliche Dauer der Dränungen mit 60 Jahren angesetzt und angenommen wird, dass sie innerhalb der 60-jährigen Periode in gleichmässiger Verteilung zustande gekommen sind, würde man, mit der eben genannten Kostensumme als Grundlage, zu dem Ergebnis kommen, dass in dem schwedischen Ackerboden ein Kapital von rund 170 Millionen Kronen in der Form von Dränungen niedergelegt sei. Rechnet man mit der eben genannten Dauer von 60 Jahren, so ist ein jährlicher Kapitaleinsatz von ungefähr 5,8 Millionen Kronen erforderlich, bloss um die genannten Dränungen instand zu halten. Rechnet man nach FLODKVIST (1931) damit, dass 2/3 der Ackerfläche des Landes, d. h. 2 547 000 ha, Dränungen notwendig haben, insofern als Dränung hier wirtschaftlichen Gewinn verspricht, so würde ein Kapital von rund 407 Millionen ökonomisch vorteilhaft in Form von Dränungen des schwedischen Ackerbodens angelegt werden können. Das Instandhalten dieser Dränungen würde jährlich rund 14 Millionen Kronen erfordern.

Die Kosten einer Dränung werden stark durch die Art ihrer Ausführung beeinflusst. Die Ausführung ihrerseits ist für die Effektivität der Dränung und damit auch für die durch dieselbe entstandene Melioration bestimmend. Natürlich ist immer ein Bestreben vorhanden, jener Ausführungsform der Dränung so nahe wie möglich zu kommen, die den besten wirtschaftlichen Ertrag gibt, d. h. der Form, die für die

angewandten Kosten die grösste mögliche Melioration pro Einheit ergibt. Auf Grund der eben genannten mit jeder Dränung gegebenen grossen Kosten ist es von beträchtlichem Belange, dass dieses Problem für jeden einzelnen Fall möglichst richtig gelöst werde. Eine Voraussetzung dafür ist indessen, dass vorher eine Anzahl verschiedener Fragen beantwortet werde. Eine solche Frage von zentraler Bedeutung für die Behandlung des Problems ist die, in welchem Ausmasse die Wahl der Ausführungsart einer Dränung für die Bedingungen des Pflanzenbaues Bedeutung hat. Die Fragen, die dabei in erster Linie interessieren, betreffen die Abhängigkeit der Bedingungen des Pflanzenbaues von Dränabstand, von Dräntiefe und von Rohrweite, da die Kosten der Dränung in hohem Grade von diesen Faktoren bestimmt werden. Untersuchungen über die genannten Zusammenhänge sind verschiedene Male ins Werk gesetzt worden und gehen auch gegenwärtig noch weiter. Trotzdem müssen wir doch die hierhergehörigen Probleme als zum grossen Teil noch ungelöst betrachten.

Bei den meisten der über die Abhängigkeit der Bedingungen des Pflanzenbaues von Dränabstand und Dräntiefe ausgeführten Untersuchungen hat man bis jetzt einen direkten Weg zu gehen versucht, der geradeaus zum Ziele führen sollte. Man hat sogenannte Dränversuche angestellt, d. h. man hat einen bestimmten Boden in verschiedener Weise gedränt und darauf die Bedingungen des Pflanzenbaues durch quantitative und in gewissen Fällen vielleicht auch qualitative Schätzung des erhaltenen Ernteertrags studiert. Eine Erweiterung einer solchen Versuchstätigkeit ist — unter Hinweis auf die wirtschaftliche Bedeutsamkeit der Dränungsarbeiten — mehrfach empfohlen worden. In internationalem Zusammenhange ist in diesem Sinne von der *VI. Kommission der International Society of Soil Science* (FAUSER 1929) eine Erweiterung der Durchführung von Dränversuchen vorgeschlagen und lebhaft befürwortet worden. Für Schweden haben die Verbände »*Föreningen Sveriges Jordbrukskonsulenter*« und »*Statens Lantbruksingenjörer*« das Ausführen von Dränversuchen empfohlen. Dass eine solche Ausdehnung der Anstellung von Dränversuchen sowohl von wissenschaftlichem wie von praktischem Gesichtspunkte aus von Bedeutung wäre, ist selbstverständlich. Dem Verfasser will es indessen vorkommen, als ob dieser direkte Weg, die Abhängigkeit der Bedingungen des Pflanzenbaues von Dränabstand und Dräntiefe bestimmen zu wollen, für die Behandlung der Frage nicht hinreichend wäre. Die abhängige Variable, die Bedingungen des Pflanzenbaues, scheint von den unabhängigen Variablen, dem Dränabstand und der Dräntiefe, allzu »abgelegen« zu sein, als dass der Zusammen-



hang durch blosse Dränversuche direkt studiert werden könnte. So bestimmen die Dräntiefe und der Dränabstand in erster Linie die Wasserverhältnisse des Bodens. In welchem Ausmasse und in welcher Weise dies geschieht, hängt z. B. von der Beschaffenheit des Bodens und der geologischen Unterlage, von topographischen und meteorologischen Umständen ab. Die Wasserverhältnisse des Bodens beeinflussen ihrerseits die Entwicklung der Pflanzen. Dies geschieht zunächst sozusagen direkt, indem die Pflanze für ihre Wasserversorgung von dem Bodenwasser abhängig ist. Aber wie das Bodenwasser auf diesem Wege für die Entwicklung der Pflanze bestimmend wird, ist von verschiedenen Faktoren, wie der physikalischen und chemischen Beschaffenheit des Bodens, allerlei meteorologischen Momenten sowie von Art und Entwicklungsstufe der Pflanze abhängig. Ausserdem wird die Entwicklung der Pflanze durch die Wasserverhältnisse des Bodens auch indirekt beeinflusst. So ist der Wassergehalt des Bodens z. B. für die Bodentemperatur, für chemische Verwandlungen im Boden sowie für das mikrobielle Leben des Bodens von beträchtlicher Bedeutung und damit auch für die Entwicklung der Pflanzen bestimmend. Zieht man all dies in Betracht, so sieht man leicht ein, dass es bei dem gewöhnlichen Dränversuch, bei dem die obengenannten Teilzusammenhänge meistens nicht beachtet werden, nicht möglich sein dürfte, die Abhängigkeit der Bedingungen des Pflanzenbaues von Dränabstand und Dräntiefe effektiv zu studieren. Der in Rede stehende Zusammenhang kann aus den erhaltenen Versuchsergebnissen nicht rein isoliert werden. Der Raum erlaubt es nicht, hier auf die Ergebnisse der an verschiedenen Orten der Erde ausgeführten Dränversuche einzugehen, aber als ein Gesamturteil dürfte gesagt werden können, dass die betreffenden Resultate über den studierten Zusammenhang keine hinreichend zuverlässigen Aufschlüsse von generellem Werte geben.

Nach der Ansicht des Verfassers kann also der Zusammenhang zwischen Dräntiefe und Dränabstand einerseits und den Bedingungen des Pflanzenbaues andererseits durch direkte Dränversuche nicht zur Gänze geklärt werden. Andere Wege neben diesem scheinen gewählt werden zu müssen. Dabei muss in erster Linie eine Aufteilung des Hauptzusammenhanges in verschiedene Teilzusammenhänge erfolgen, von denen jeder einen so begrenzten Charakter hat, dass alle auf ihn einwirkenden Faktoren beurteilt werden können. Diese verschiedenen Teilzusammenhänge, die zuerst studiert werden müssen, bevor sich eine bestimmte Auffassung des Hauptzusammenhanges herausbilden kann, können unter zwei Hauptrubriken eingeordnet werden. Teils müssen Zusammenhänge studiert werden, die die Einwirkung der Aus-

führung der Dränung auf die Wasserverhältnisse des Bodens beleuchten, teils solche, die die Bedeutung des letztgenannten Faktors für die Bedingungen des Pflanzenbaues klären.

In der hier vorgelegten Arbeit nimmt der Verfasser einen der obengenannten Teilzusammenhänge, nämlich die Einwirkung der Dränung auf die Bewegung oder Strömung des Wassers im Boden zu ergänzender Durchforschung auf. Dieser Zusammenhang fällt unter die erste der obengenannten Haupttrubriken. Der Verfasser ist sich natürlich bewusst, dass die Kenntnis dieses Teilzusammenhanges an und für sich noch keine festen Anhaltspunkte für die Beurteilung des Hauptzusammenhanges geben kann. Nur insoweit die Untersuchung durch Untersuchungen über die übrigen Teilzusammenhänge ergänzt wird, wird eine solche Beurteilung möglich, und erst dann werden wir imstande sein, mit einem grösseren Grade von Sicherheit die Abhängigkeit der Bedingungen des Pflanzenbaues von der Ausführungsform einer Dränung zu beurteilen. In Hinblick auf die wirtschaftliche Bedeutsamkeit, die der Erkenntnis des Hauptzusammenhanges zukommt, ist zu hoffen, dass solche Untersuchungen möglichst bald in Angriff genommen und durchgeführt werden.

## II. Verschiedene Arten des Vorkommens von Wasser und seine Bewegungen im Boden.

### 1. Verschiedene Arten des Vorkommens von Wasser im Boden.

Das in einem Boden vorkommende Wasser kann nach den Kräften, unter deren Einwirkung es steht, in verschiedene Gruppen eingeteilt werden. Wir wollen im Folgenden eine solche für unsere Zwecke geeignete Einteilung machen. Wir gehen dabei von einer Bodenmasse aus, die mit Wasser in der Weise in Berührung steht, dass sämtliche Poren des Bodens als wassergefüllt angenommen werden. Wenn wir uns nun die betreffende Bodenmasse auf einen das Wasser leicht durchlassenden Untergrund gelagert denken, z. B. auf ein feinmaschiges Metalltuchnetz, so wird eine gewisse Menge des Wassers die Erde durch das Netz verlassen, während ein anderer Teil im Boden zurückbleibt. Wir nennen den ersten Teil der Wassermenge, den der Boden unter der Einwirkung der Schwerkraft nicht zurückzuhalten vermag, *freies Wasser* (EKSTRÖM 1938). Den übrigbleibenden Teil, den der Boden mit Kräften bindet, die stärker als die Schwerkraft sind, nennen wir *gebundenes Wasser* (EKSTRÖM 1938).

*Das freie Wasser.* Wenn freies Wasser in einem Boden vorkommt und, wie oben, freier Abfluss gegeben ist, verlässt das Wasser den Boden. Ist dagegen der Boden nach unten hin von einer schwer durchlässigen oder undurchlässigen Wand begrenzt, so sammelt sich das freie Wasser in den niedersten Teilen des Bodenvolumens, wo es alle Poren des Volumens erfüllt. Solange sich das freie Wasser im Absinken zu den genannten niederen Teilen befindet und nicht alle Poren füllt, heissen wir es *Sinkwasser*. Wenn die unteren Teile erreicht und sämtliche Poren gefüllt sind, heissen wir es *Grundwasser*.

Das Grundwasser ist dadurch charakterisiert, dass der Druck innerhalb desselben immer grösser ist als der Atmosphärendruck.

Nach oben hin kann das Grundwasser des Bodens von einer Fläche begrenzt werden, dem Grundwasserspiegel. Längs diesem herrscht ein Druck, der gleich hoch ist wie der Atmosphärendruck.

*Das gebundene Wasser.* Das Wasser, das ein Boden mit Kräften bindet, die stärker als die Schwerkraft sind, kann auf verschiedene Art festgelegt sein, und wir können darnach verschiedene Gruppen des gebundenen Wassers unterscheiden. So haben wir zunächst das Wasser das im Kristallgitter eines jeden Bodenkorns gebunden ist. Wir benennen es, wie das auch in der Chemie der Fall ist, *Kristallwasser*. Zweitens ist eine gewisse Menge Wasser an die Oberfläche der Bodenkörner gebunden, und zwar durch Kräfte von elektrostatischer oder, wie MATTSON (1932) hervorgehoben hat, von osmotischer Natur. Schliesslich wird drittens eine gewisse Menge Wasser in den Bodenporen durch die Kraft der Oberflächenspannung gebunden. Wir nennen dasselbe *kapillar gebundenes Wasser*.

Das gebundene Wasser ist dadurch charakterisiert, dass der Druck innerhalb desselben niedriger ist als der Druck der Atmosphäre.

*Das gegenseitige Mengenverhältnis zwischen freiem und gebundenem Wasser.* Das gegenseitige Mengenverhältnis zwischen freiem und gebundenem Wasser in einem ganz wassergefüllten Boden wechselt unter verschiedenen Verhältnissen in hohem Grade und ist von verschiedenen Faktoren abhängig.

In erster Linie wirkt die Korngrösse des Bodens ein. Je kleiner die Korngrösse eines Bodens ist, ein umso grösserer Teil des Wassers wird durch elektrostatische, osmotische und kapillare Kräfte gebunden. Dass die an die Oberfläche der Bodenkörner gebundene Wassermenge grösser wird, hat seinen Grund darin, dass bei verringerter Korngrösse die totale Kornfläche per Volumeneinheit des Bodens grösser wird. Die Vergrösserung ist, wie leicht gezeigt werden kann, mit dem rezi-

proken Werte des Korndurchmessers proportional (ROBINSON 1936). Dass die kapillar gebundene Wassermenge bei verminderter Korngrösse grösser wird, ist darauf zurückzuführen, dass mit der genannten Verminderung eine Verminderung des Flächeninhalts der Porenschnittflächen eintritt. Verminderte Korngrösse hat weiter, wenn der Boden sich in Einzelkornstruktur befindet, zur Folge, dass die absolute Menge des freien Wassers im Boden geringer wird, weil die Menge der Poren, die von einer derartigen Grössenordnung sind, dass freies Wasser vorkommen kann, abnimmt. In einer hinreichend feinkornigen Bodenart von einfacher Kornstruktur kann die Menge des freien Wassers so bis auf 0 heruntergehen. Das ist z. B. bei den sog. Seifentonen der Fall. Kommen andererseits in dem feinkornigen Boden Risse oder Konkretionen vor, was in den oberen Horizonten des Tonbodens häufig der Fall ist (EKSTRÖM & FLODKVIST 1925, FLODKVIST 1931), so kann die Menge des freien Wassers trotz des Feinheitsgrades beträchtlich sein.

Ausser durch die Korngrösse wird die Menge des gebundenen Wassers und damit das Verhältnis zwischen gebundenem und freiem Wasser auch durch andere Faktoren bestimmt, unter denen die physikalisch-chemischen Eigenschaften der Bodenkolloide an erster Stelle zu nennen sind. So wirken, ausser der elektrischen Ladung der Kolloide, auch die Ionen ein, die als Ionenschwärme die Kolloidpartikel umgeben. Sind diese Ionen stark hydratisiert, was z. B. bei den Natriumionen der Fall ist, so werden relativ grössere Wassermengen elektrostatisch indirekt an die Bodenkörner gebunden, als wenn die Ionen schwächer hydratisiert sind. Sind weiter die Ionen stark dissoziiert, aber doch elektrostatisch an die Kolloidkörner gebunden, so wird eine relativ grössere Wassermenge osmotisch an die Kornflächen gebunden, als wenn die Ionen weniger dissoziiert sind. Diese Tatsachen, die u. a. MATTSON (1932) untersucht hat, sollen hier nicht näher berührt werden. Eine zusammenfassende Darstellung des Themas hat der Verfasser in früheren Jahren gegeben (GUSTAFSSON 1937).

*Die Art des Wasservorkommens im Boden und die Wirkung der Dränung.* Bei der Dränung des Bodens wird dem in ihm enthaltenen Wasser Gelegenheit gegeben, infolge seiner Schwere abzulaufen. Das aus dem Boden durch Dränung abgeführte Wasser ist also nur das freie Wasser, während das gebundene Wasser zwar von der Dränung beeinflusst wird, aber doch im Boden bleibt. Wenn es sich also wie hier darum handelt, die von der Dränung in einem Boden verursachten Strömungen zu behandeln, so interessiert es uns in erster Linie, die Gesetzmässigkeiten für die Bewegung des freien Wassers zu finden.

## 2. Die Bewegung des Wassers im Boden.

Wir wollen nunmehr versuchen, für die Bewegung des Wassers in einer Bodenmasse Regeln zu erhalten. Unsere erste Aufgabe ist dabei, einen Ausdruck für die Abhängigkeit der Bewegung von den sie verursachenden Kräften zu suchen. Dabei behandeln wir zwei verschiedene Fälle. In dem ersten derselben nehmen wir an, dass freies Wasser in so grosser Menge im Boden vorkommt, dass alle Poren desselben mit Wasser gefüllt sind. In dem zweiten Falle nehmen wir an, dass freies Wasser in der Bodenmasse nicht vorkommt.

### A. Strömung in völlig wassergefülltem Boden (Grundwasserbewegung).

#### a. Darcys Satz.

*Ableitung und Gültigkeit.* Wenn eine Erdsäule in waagerechter Lage nach Fig. 1 mit zwei bis zu verschiedenen Höhen mit Wasser gefüllten Gefässen in Verbindung gesetzt wird, entsteht zwischen den Endflächen der Erdsäule ein Druckunterschied, der, wenn der Höhenunterschied zwischen den Wasserflächen des Gefässes  $h$  cm ist,  $h$  g/cm<sup>2</sup> beträgt. Infolge dieses Unterschiedes entsteht, wenn die Säule wasserdurchlässig ist, eine Strömung, und wir können a priori voraussetzen, dass je grösser der in Frage kommende Druckunterschied ist, eine umso grössere Wassermenge  $Q$  in der Zeiteinheit durch die Säule hindurchgeht. Zwischen  $Q$  und  $h$  muss ein funktioneller Zusammenhang existieren.

Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen Druckgefälle und im Boden durchströmender Wassermenge wurden im Jahre 1854 von dem französischen Ingenieur H. DARCY (1856) vorgenommen. Darcys Versuche wurden mit einer Apparatur ausgeführt, die nach demselben Prinzip wie die in Fig. 1 dargestellte gebaut war, wenn auch die Erdsäule in vertikaler Lage gehalten wurde. Es wurde eine be-

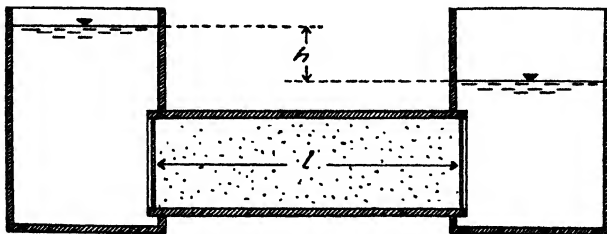


Fig. 1. Darcys Versuch.

trächtliche Anzahl von Bestimmungen der durchströmenden Wassermenge bei verschiedener Druckdifferenz und verschiedener Länge der Erdsäule durchgeführt. Als Resultat ergab sich der einfache Ausdruck

$$Q = -k' \frac{h}{l}, \quad (1)$$

wobei  $Q$  die durchströmende Wassermenge,  $h$  der Druckunterschied,  $l$  die Länge der Erdsäule und  $k'$ , eine Konstante ist, die u. a. von der Durchlässigkeit des Bodens abhängig ist. Bildet man den Quotienten  $Q/F = v$ , in dem  $F$  der Flächeninhalt des Querschnitts der Erdsäule ist, so können wir anstatt (1) schreiben

$$v = -k \frac{h}{l}, \quad (2)$$

wobei  $v$  die Durchströmungsgeschwindigkeit des Wassers genannt zu werden pflegt.<sup>1</sup> Nach der allgemeinen Auffassung (FORCHHEIMER 1930, DACHLER 1936, MUSKAT 1937) war Darcy der erste, der auf diese Weise den Zusammenhang zwischen Druckgefälle und Wasserbewegung im Boden studierte, und der Ausdruck (2) hat daher nach ihm den Namen Darcys Satz bekommen.

Der in Rede stehende Zusammenhang kann sich uns auch durch theoretische Überlegungen ergeben. Dabei können wir voraussetzen, dass die Wasserbewegung im Boden im allgemeinen ohne Turbulenz vor sich geht, teils weil die Geschwindigkeit gewöhnlich gering ist, teils weil die Grösse des Querschnitts der Bodenporen im allgemeinen klein ist, weshalb Reynolds kritische Zahl (REYNOLDS 1883) nicht überschritten wird. Denken wir uns nun, dass die Bodenporen geradlinig seien und in ihrer ganzen Länge einen konstanten kreisförmigen Querschnitt hätten, so würden wir auf die durch jede Pore hindurchgehende Strömung den wohlbekannten Satz von Hagen-Poiseuille (HAGEN 1839, POISEUILLE 1843, OSTWALD 1925, SCHILLER 1933) anwenden können

$$v = -\frac{\gamma D^2}{32\eta} \cdot \frac{h}{l}, \quad (3)$$

wobei  $\gamma$  das spezifische Gewicht des Wassers,  $D$  der Porendurchmesser und  $\eta$  der Zähigkeitskoeffizient (Dimension  $\frac{\text{g} \cdot \text{sek}}{\text{cm}^2}$ ) ist. Wie man

<sup>1</sup> Die Benennung ist insofern unrichtig, als die eigentliche Mittelgeschwindigkeit des Wassers bei dem Hindurchströmen durch die Bodenporen natürlich bedeutend grösser ist und aus  $v$  mittels einer Division durch die Zahl erhalten wird, die angibt, einen wie grossen Teil von  $F$  der Querschnitt der Poren einnimmt.

sieht, stimmt (3) formal mit Darcys Satz überein, da die Strömungsgeschwindigkeit mit dem Druckgefälle direkt proportional ist, eine Tatsache, von der übrigens bereits 1816 GIRARD experimentell nachgewiesen hat, dass sie für gerade Kapillarröhren gilt. Ein gleiches Resultat würden wir erhalten, wenn wir für Poren mit beliebigem, aber konstantem Querschnitt, von den allgemeingültigen Navier-Stokesschen Gleichungen (s. S. 21) für laminare Bewegung zäher Flüssigkeiten ausgehend, den Ausdruck für die Strömung suchten.

Indessen haben die Bodenporen keinen konstanten Querschnitt und sie verlaufen auch nicht geradlinig die Bodenmasse hindurch. Das hat zur Folge, dass bei der Strömung ausser Reibungskräften auch Trägheitskräfte auftreten, die, allgemein ausgedrückt, mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sind. Stellen wir dies in Rechnung, so würden wir für (2) als Zusammenhangsfunktion erhalten

$$C_1 v + C_2 v^2 = -h/l, \quad (4)$$

worin  $C_1$  und  $C_2$  Konstante sind (DACHLER 1936). Indessen ist, wie oben erwähnt, die Strömungsgeschwindigkeit des Grundwassers im allgemeinen niedrig, und weiter hat  $C_2$ , wie genau ausgeführte Versuche gezeigt haben, im Verhältnis zu  $C_1$  einen niedrigen Wert (LINDQUIST 1933 s. u.). Der quadratische Ausdruck kann daher meist vernachlässigt werden.

Ohne Darcys Untersuchungen zu kennen (SMREKER 1914), entwickelte DUPUIT im Jahre 1863 einen Gedankengang, der dem eben dargelegten ähnlich ist und kam zur Gleichung (4). In Übereinstimmung mit dem oben Angedeuteten betonte Dupuit auch, dass der quadratische Ausdruck vernachlässigt werden könne, und damit war er zu demselben Ergebnis gekommen wie Darcy.

Dupuit ging aber einen Schritt weiter als Darcy, indem er seinen neu gefundenen Satz auf gewisse technische Probleme anwandte. Da diese Anwendungen in der Diskussion über die Gültigkeit von Darcys Satz später eine gewisse Rolle spielen sollten, wollen wir sie hier kurz erwähnen.

Dupuit studierte u. a. den Zufluss zu einem zylindrischen Brunnen von dem angenommen war, dass er in einem grundwasserführenden Lager mit stillstehendem Grundwasser angelegt sei, das seinerseits von einem als undurchlässig angesehenen horizontalen Bodenlager unterlagert sei, alles nach Fig. 2. Aus dem Brunnen wird kontinuierlich in der Zeiteinheit die Wassermenge  $Q$  gepumpt, wodurch um den Brunnen eine trichterförmige Senkung des ursprünglich ebenen Grundwasserspiegels entsteht. Dupuit betrachtete die gegen den Brunnen-

mantel gerichtete Strömung in der Bodenmasse in einer beliebig gewählten, mit dem Brunnenmantel gleichachsigen Zylinderfläche vom Radius  $r$ , längs welcher die Höhenlage des Grundwasserspiegels über dem undurchlässigen Lager mit  $h$  angenommen wurde, und setzte voraus, dass die gegen eine solche Fläche normal gerichtete Geschwindigkeitskomponente auf der ganzen Fläche konstant und ausserdem dass sie nach (2)  $= -k \cdot dh/dr$  sei, wobei  $dh/dr$  die Neigung des Grundwasserspiegels gegen die Horizontalebene in dem Kreise bedeutet, längs welchem der Grundwasserspiegel von der Zylinderfläche geschnitten wird. Daraus erhält man

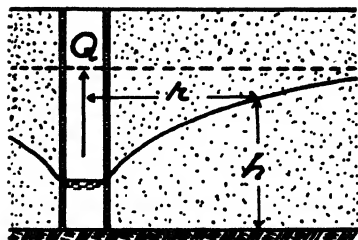


Fig. 2. Grundwasserströmung zu einem Brunnen nach Dupuit.

$$Q = -2\pi r k \cdot \frac{dh}{dr},$$

was nach Integration

$$\frac{Q}{2\pi} \cdot \ln r = -h^2 + C \quad (5)$$

als Gleichung des Grundwasserspiegels ergibt.

Die gleiche Ableitung, die Dupuit auf diese Weise vornahm, führte THIEM im Jahre 1878 aus, wobei er von Darcys Untersuchungen ausging.

Indessen kann, wie mehrere Forscher, an ihrer Spitze SMREKER (1914), betont haben, der erhaltene Ausdruck nicht korrekt sein, da der Grundwasserspiegel unter den vorausgesetzten Umständen sich asymptotisch seiner Lage vor der Pumpung nähern muss, wenn  $r$  gegen  $\infty$  geht, was nach (4) nicht der Fall ist, da dort  $h$  mit steigendem  $r$  unbegrenzt wächst. Diese Anomalie hat nach Smreker ihren Grund darin, dass Darcys Satz fehlerhaft ist, und er richtete heftige Angriffe gegen denselben: »Es muss daher das Darcy-Dupuitsche Gesetz für die Bestimmung der Widerstände bei der Bewegung des Grundwassers im Untergrunde als *vollständig unbrauchbar* bezeichnet werden, und es mag eine offene Frage bleiben, wie es bei diesen auffälligen und sich ohne weiteres in die Erscheinung drängenden Widersprüchen mit der Natur möglich war, dass das Darcy-Dupuitsche Gesetz sich so lange halten und noch in neuester Zeit in Lehrbüchern Eingang finden konnte.« Anstatt Darcys Ausdruck schlägt Smreker vor

$$-h/l = C_1 v^2 + C_2 v^{3/2},$$



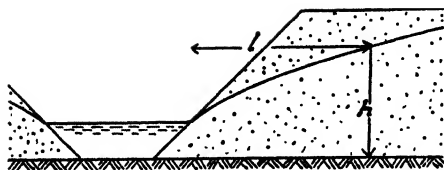


Fig. 3. Grundwasserströmung zu einem Wasserlauf nach Dupuit.

für welchen Ausdruck es ihm jedoch an einer experimentellen Unterlage zu fehlen scheint.

Indessen liegt der Fehler nicht, wie Smreker annahm, in Darcys Satz, sondern vielmehr in der gemachten Voraussetzung, dass die Geschwindigkeit normal zu

der betrachteten Zylinderfläche auf der ganzen Fläche konstant und mit der Neigung der Wasserfläche in der Schnittlinie mit der Fläche proportional sei (FLÜGEL 1928). Eine derartige Annahme ist allerdings, wie FORCHHEIMER (1898) gezeigt hat, annähernd richtig, wenn die Neigung der Wasserfläche schwach ist, führt aber sonst zu unrichtigen Ergebnissen.

Eine von Dupuit ausgeführte zweite Anwendung galt dem Zufluss zu einem Wasserlauf, der durch ein Grundwasser führendes Bodenschicht angelegt ist, von dem wiederum angenommen war, dass es von einem als undurchlässig angesehenen horizontalen Bodenschicht unterlagert sei, alles nach Fig. 3. Dupuit betrachtete die Strömung in einer ebenen, vertikalen, mit dem Wasserlaufe parallelen Fläche, die im Abstand  $l$  von demselben gelegt war, und setzte wie in dem vorhergehenden Fall voraus, dass die normal gegen die Fläche gerichtete Geschwindigkeitskomponente auf der Fläche konstant und  $= -k \cdot dh/dl$  sei, wobei  $dh/dl$  die Neigung des Grundwasserspiegels längs der Schnittlinie zwischen der ebenen Fläche und dem Grundwasserspiegel ist. Die per Zeiteinheit und per Längeneinheit des Wasserlaufes dahinströmende Wassermenge  $Q$  kann nun mit dem Ausdruck

$$Q = -kh \cdot \frac{dh}{dl}$$

gegeben werden, der uns nach Integrierung

$$2 Q l = -kh^2 + C$$

als Gleichung des Grundwasserspiegels ergibt. Die in Rede stehende Fläche würde also die Form einer Parabel haben. Aus denselben Gründen wie bei der Brunnengleichung (5) kann indessen der Ausdruck nicht als korrekt betrachtet werden.

Denselben Weg wie Dupuit sind später u. a. COLDING (1872), ROTHÉ (1924) und HOOGHOUT (1935) bei der Behandlung des Zuflusses zu Dränleitungen gegangen. Wir kommen in einem späteren Zusammenhang auf die Ergebnisse dieser Forscher zurück.

Unter anderen älteren Forschern, die den Zusammenhang zwischen Druckhöhe und der im Boden dahinströmenden Wassermenge untersucht haben, ist der oben erwähnte Colding zu merken. Dieser untersuchte schon im Jahre 1851, d. h. drei Jahre vor Darcy den Zusammenhang zwischen der Höhe der Ausströmungsöffnung und der ausgeströmten Wassermenge bei artesischen Brunnen und zog hieraus die Folgerung, dass die Strömungsgeschwindigkeit im Boden mit dem Druckgradienten direkt proportional sei. Coldings Versuch wurde jedoch erst 1872 veröffentlicht. Colding untersuchte weiter im Laboratorium den Zusammenhang zwischen der Neigung des Grundwasserspiegels und der über eine ebene Unterlage dahinströmenden Wassermenge, wobei sich ihm direkte Proportionalität ergab. Da er immer nur mit schwachen Neigungen des Spiegels arbeitete, kann auch dieses Ergebnis als in Übereinstimmung mit Darcys Satz stehend betrachtet werden.

Späterhin ist Darcys Satz der Gegenstand einer sehr grossen Anzahl von Nachprüfungen gewesen. Unter diesen sind die von SEELHEIM (1880) mit grosser Genauigkeit ausgeführten Versuche und weiter KINGS (1899) umfangreiche Untersuchungen zu nennen, die alle Darcys Satz stützen. Andere von FORCHHEIMER (1898) angestellte Versuche stützen den theoretischen Satz (4), aber der quadratische Ausdruck ist hier klein. Von neueren umfangreicheren Untersuchungen mögen die von LINDQUIST (1933) durchgeführten genannt werden, der u. a. von einem von P. G. von Heideken herstammenden experimentellen Material ausging. Lindqvist stellte die Formel auf

$$\frac{K_1 \eta}{2 \gamma \delta^2} v + \frac{K_2}{2 g \delta} v^2 = - \frac{h}{l}, \quad (6)$$

wobei  $\delta$  der Bodenkorndurchmesser,  $\eta$  der Zähigkeitskoeffizient  $\gamma$  das spezifische Gewicht des Wassers,  $g$  die Beschleunigung der Schwere und  $K_1$  und  $K_2$  Konstanten sind. Für gleich grosse Körner und 38 % Porosität des Bodens fand Lindqvist für  $K_1$  einen Wert von 2500 und für  $K_2$  von 40. Lindqvist weist also das Vorhandensein des quadratischen Ausdruckes nach, obwohl dieser klein ist. Aus seinem Material zieht Lindqvist weiter den Schluss, dass Darcys Gesetz nicht mehr ohne weiteres angewendet werden dürfe, sobald das Produkt aus der Durchschnittsgeschwindigkeit in den Bodenporen in cm/sek. und dem Bodenkorndurchmesser in mm 0,50 übersteigt. Da die der Dränung unterzogenen Böden gewöhnlich feinkörnig sind und da die Strömungsgeschwindigkeiten in gedräntem Boden meist nicht gross sein können, kommen wir in dem hier betrachteten Zusammenhang nicht bis zu diesem kritischen Werte.

Noch über eine Menge anderer Untersuchungen der Gültigkeit von Darcys Satz könnte hier berichtet werden, aber der Raum erlaubt es nicht. Statt dessen verweise ich auf die ausführlichen Diskussionen und Zusammenstellungen zum Thema, die u. a. TERZAGHI (1925), NEMÉNYI (1934), FORCHHEIMER (1930), DACHLER (1936), KAUFMANN (1934), PRINZ (1919) und MUSKAT (1937) gegeben haben. Sämtliche betrachten *Darcys Satz als einen guten Ausdruck für den Zusammenhang zwischen Druckgefälle und Strömungsgeschwindigkeit im Boden*. Auch die Untersuchungen, die der Verfasser teils früher (GUSTAFSSON 1940), teils im Zusammenhang mit dieser Arbeit ausgeführt hat, bestätigen die Gültigkeit des Satzes. Wir werden im Folgenden in beträchtlichem Ausmasse auf demselben aufbauen.

*k in Darcys Satz.* Die in (2) enthaltene Konstante  $k$  mit der Dimension cm/sek. ist für die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers im Boden direkt bestimmend. Ihre Grösse wird teils vom Wasser, teils vom Boden bestimmt.

Der Faktor, von dem man annehmen kann, dass er beim Wasser sich geltend mache, ist der Zähigkeitskoeffizient  $\eta$ , und nach (3) sollte der Zusammenhang zwischen  $\eta$  und  $k$  umgekehrt proportional sein. Dass dies der Fall ist, wenn Darcys Satz gilt, geht u. a. aus Untersuchungen hervor, die HAGEN (1869), HAVREZ (1870), FORCHHEIMER (1886), SEELHEIM (1880), FORCHHEIMER (1930), SCHAFFERNAK & DACHLER (1934) ausgeführt haben, sowie auch aus einer vom Verfasser früher angestellten Untersuchung (GUSTAFSSON 1940).  $\eta$  seinerseits ist durch verschiedene Faktoren bestimmt, unter denen in erster Linie die Temperatur zu merken ist. Der Zusammenhang zwischen dieser und  $\eta$  ist nach POISEVILLE (1843) durch den Ausdruck

$$\eta = \frac{0,00001814}{1 + 0,0337 T + 0,00022 T^2} \quad (7)$$

gegeben, wobei  $T$  die Temperatur in Celsiusgraden ist. Wir erhalten folglich einen gewissen Einfluss der Temperatur auf die Strömungsgeschwindigkeit, und nach (7) sollte die Geschwindigkeit sich mit nicht weniger als ca. 3 % für jeden Grad der Temperaturänderung ändern. Dass dies auch wirklich geschieht, haben die obengenannten Untersuchungen gezeigt.

Unter den Faktoren des Bodens, die  $k$  beeinflussen, ist bei einem Boden von gleichmässiger Korngrösse diese selbst zu beachten. Je grösser sie ist, desto grösser ist  $k$ . Dieser Sachverhalt ist quantitativ auf deduktivem und empirischem Wege von verschiedenen Forschern

studiert worden, unter denen SEELHEIM (1880), FORCHHEIMER (1930), SLICHTER (1898), ZUNKER (1921) und LINDQVIST (1933) zu nennen sind. In einem Boden von ungleichmässiger Korngrösse wirkt auch das Mengenverhältnis zwischen Körnern von verschiedener Grössenordnung ein. Die hier geltenden Beziehungen sind u. a. von HAZEN (1892) untersucht worden. In Böden mit grösserem Gehalt an kolloidaler Substanz sind die Eigenschaften derselben von Einfluss. So wirken kolloidausflockende Ionen vergrössernd auf  $k$ , während kolloidzerstreuende Ionen in entgegengesetzter Richtung wirken, wie schon PEARSON (1892) und später verschiedene andere Forscher (HALLGREN 1944, u. a.) gezeigt haben. Weiter ist bei dem kolloidreichen Boden dessen Struktur in sehr hohem Grade von Einfluss. Während nämlich  $k$ , wenn der Boden Einzelkornstruktur hat, oft sehr niedrige Werte aufweist, können diese bedeutend werden, wenn der Boden durch Austrocknung, Frost oder Bearbeitung irgendeine Form von griesförmiger, rissiger oder klumpenförmiger Struktur angenommen hat. Unter den Untersuchungen, die dies gezeigt haben, mögen die von FLODKVIST (1931) und EKSTRÖM & FLODKVIST (1925) hervorgehoben werden.

Das bis jetzt über die auf  $k$  einwirkenden Faktoren Dargelegte können wir mit dem Ausdruck

$$k = \alpha / \eta \quad (8)$$

zusammenfassen, wobei  $\eta$  der Zähigkeitskoeffizient des Wassers und  $\alpha$  (mit der Dimension  $\text{cm}^2$ ) eine vom Boden abhängige Konstante ist.  $\alpha$ , das ein Ausdruck für die Durchlässigkeit des Bodens ist, soll im Folgenden der *Durchlässigkeitskoeffizient* genannt werden, während  $k$ , das die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers im Boden bestimmt, der *Strömungskoeffizient* der Bewegung heissen soll. Wir werden weiterhin Verwendung für beide Ausdrücke haben.

Die Frage nach dem absoluten Werte von  $k$  und  $\alpha$  unter verschiedenen Verhältnissen soll hier nicht zu genauerer Diskussion aufgenommen werden, da dies allzu weit führen würde. Indessen sollen als eine erste Übersicht einige Werte angegeben werden, um die Grössenordnung der Konstanten unter verschiedenen Verhältnissen zu zeigen. Die Werte, die einer Arbeit von EKSTRÖM (1941) entnommen sind, sind aus Tabelle 1 zu ersehen.

*Verallgemeinerung von Darcys Satz.* Bei den oben angeführten Versuchen und Ableitungen, die zu Darcys Satz (2) geführt haben, bestand die ganze Zeit die Annahme, dass das Grundwasser, makro-

Tabelle 1.

Die Grösse  $k$  (cm/sek) bei der Temperatur  $20^{\circ}$  C bei einigen verschiedenen Bodenarten.  
(Nach EKSTROM 1941.)

Bodenart	$k$ (cm/sek)	
	variiert zwischen	Durchschnitt
Kies .....	$1.6 \cdot 10^{-1} - 1.9 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$
Grober Sand .....	$1.4 \cdot 10^{-1} - 3.3 \cdot 10^{-3}$	$6.9 \cdot 10^{-2}$
Sand .....	$1.2 \cdot 10^{-1} - 1.9 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-2}$
Mittlerer Sand .....	$8.3 \cdot 10^{-3} - 5.6 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$
Nicht völlig gleichkorniger Kies und Sand .....	$8.3 \cdot 10^{-4} - 2.8 \cdot 10^{-5}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$
Grober Heidensand, Grober Mo .....	$(2.2 \cdot 10^{-4} - 1.9 \cdot 10^{-4})$	$2.2 \cdot 10^{-4}$
Feiner Heidensand, Feiner Mo .....	$(1.9 \cdot 10^{-5} - 8.3 \cdot 10^{-6})$	$1.4 \cdot 10^{-5}$
Moränenkies .....	$3.9 \cdot 10^{-5} - 8.3 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$
Moränensand .....	$1.7 \cdot 10^{-5} - 8.3 \cdot 10^{-8}$	$1.9 \cdot 10^{-6}$
Schwachlehmiger Schluff .....	$2.2 \cdot 10^{-7} - 8.3 \cdot 10^{-8}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$
Schwachlehmiger Moränensand .....	$1.7 \cdot 10^{-7} - 2.8 \cdot 10^{-8}$	$8.3 \cdot 10^{-8}$
Leichter Moränenlehm, sandig .....		$2.8 \cdot 10^{-8}$
Mo und schluffhaltiger Lehm .....	$2.2 \cdot 10^{-7} - 2.8 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$
Lehm .....	$1.7 \cdot 10^{-7} - 1.7 \cdot 10^{-9}$	$5.6 \cdot 10^{-8}$
Ton .....		$1.9 \cdot 10^{-8}$
Schwerer Ton .....	$(2.5 \cdot 10^{-9} - 1.4 \cdot 10^{-9})$	$1.9 \cdot 10^{-9}$

skopisch gesehen, an verschiedenen Punkten der Bodenmasse dieselbe Stromrichtung gehabt habe. Mit anderen Worten, es wurde vorausgesetzt, dass eindimensionale oder geradlinige Bewegung vorliege. Weiter wurden die Strömungsgeschwindigkeit und der Durchlässigkeitskoeffizient als in der ganzen Bodenmasse konstant angenommen. Dies ist jedoch unter natürlichen Bedingungen selten oder niemals der Fall, da Strömungsrichtung, Geschwindigkeit und Durchlässigkeitskoeffizient mit dem Orte wechseln. Indessen gilt Darcys Satz noch immer für jeden Punkt der Bodenmasse. Legen wir willkürlich ein Koordinatensystem  $x, y, z$  in dieselbe ein und bezeichnen wir  $k$  als eine Funktion des Ortes mit den Ordinaten  $k(x, y, z)$ , so müssen wir dafür schreiben können

$$v = -k(x, y, z) \frac{dh}{dl}. \quad (9)$$

Teilen wir weiter  $v$  in drei gegeneinander normale Komponenten  $v_x, v_y, v_z$ , so erhalten wir

$$v_x = -k(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial x}; \quad v_y = -k(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial y}; \quad v_z = -k(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial z}; \quad (10)$$

ein Gleichungssystem, das unsere allgemeingültigere Form von Darcys Satz darstellt.

*Die Kontinuitätsgleichung.* Das Wasser hat wie jede andere Flüssigkeit eine sehr geringe Zusammendrückbarkeit. Es muss daher für jeden Teil einer wassergefüllten und durchströmten Bodenmasse der Satz gelten, dass in der Zeiteinheit eine ebenso grosse Wassermenge ausströmt wie einströmt. Diese »Kontinuitätsforderung« können wir durch die aus der Hydrodynamik wohl bekannte Kontinuitätsgleichung ausdrücken (LAMB 1932), die wir leicht durch folgende Überlegung erhalten.

Wir betrachten ein kleines parallelepipedförmiges Raumelement  $BCDEFGHI$  der Bodenmasse (vgl. Fig. 4), das die Kantenlänge  $dx$ ,  $dy$  und  $dz$  hat und so gelegen ist, dass die Kanten parallel zu den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems sind. Herrscht nun in dem Mittelpunkt des Elementes die Geschwindigkeit  $v$  mit den achsenparallelen Komponenten  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ , so können wir die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit an der linken ( $BCDE$ ) und rechten ( $FGHI$ ) Seite des Elementes folgendermassen ausdrücken:

$$v_x - \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx \text{ resp. } v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx.$$

Die durch die genannten Seiten in der Zeiteinheit strömenden Wassermengen sind dann

$$\left( v_x - \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx \right) dy dz \text{ resp. } \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx \right) dy dz.$$

Leitet man die entsprechenden Ausdrücke für die übrigen Begrenzungsflächen des Elementes ab und nimmt man dann eine Summierung vor, so erhält man für die Wassermenge, die infolge der Strömung per Zeiteinheit in dem Elemente angereichert wird, den Ausdruck

$$\left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] dx dy dz.$$

Da indessen diese Menge nach dem oben Gesagten = 0 sein muss und da die Faktoren  $dx$ ,  $dy$  und  $dz \neq 0$  sind, so folgt, dass

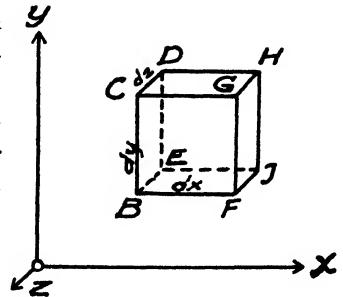


Fig. 4.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

eine Gleichung ist, die unsere Kontinuitätsforderung ausdrückt und daher Kontinuitätsgleichung genannt wird.

*Die Grundgleichung der Grundwasserbewegung.* Setzen wir nun (10) in (11) ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial \left[ -k(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial x} \right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[ -k(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial y} \right]}{\partial y} + \frac{\partial \left[ -k(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial z} \right]}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

Dieser Ausdruck, der, wie aus der Ableitung hervorgeht, für jede stationäre Grundwasserbewegung gültig sein muss, kann als die *Grundgleichung der Grundwasserbewegung* gelten.

Nun sind die Verhältnisse oft von der Art, dass der Durchströmungskoeffizient  $k$  in dem ganzen Strömungsbereiche oder in einem gewissen Teil desselben als konstant betrachtet werden kann. (12) kann dann geschrieben werden

$$\frac{\partial^2 (-kh)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (-kh)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (-kh)}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

oder, wenn wir  $kh = \varphi$  setzen,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (14)$$

Wir sind mit (14) zu einem in der mathematischen Physik wohl bekannten Ausdruck gekommen. Er wurde zum ersten Mal von LAPLACE (1782) im Zusammenhang mit Untersuchungen im Bereiche der Himmelsmechanik aufgestellt und untersucht und heisst nach ihm oft die Laplacesche Gleichung. Die Gültigkeit des Ausdruckes für die Grundwasserbewegung in einem Bereiche mit gleichartiger Durchlässigkeit hat zuerst FORCHHEIMER (1886) und unabhängig von ihm SLICHTER (1899) nachgewiesen. Wir werden im Folgenden vielfach auf ihn zurückkommen.

## b. Formale Gleichheit der Grundwasserbewegung mit gewissen anderen Strömungen.

Indem wir allgemeine Ausdrücke für die Grundwasserbewegung aufgestellt haben, haben wir uns instand gesetzt, Vergleiche zwischen ihr und anderen Strömungen anzustellen.

Wir betrachten dabei zuerst die stationäre *Strömung einer idealen Flüssigkeit*. Für diese gelten wie bekannt die Eulerschen Gleichungen (KAUFMANN 1931)

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

in denen  $v_x$ ,  $v_y$ , und  $v_z$  Geschwindigkeitskomponenten in den Richtungen  $x$ ,  $y$ , und  $z$ ,  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  die Komponenten der angreifenden Massenkraft,  $\varrho$  die Dichte und  $p$  der Druck sind. Wenn es sich nun ergibt, dass

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

ist, so bedeutet dies, wie leicht gezeigt werden kann (KAUFMANN 1931), dass die Bewegung der Flüssigkeit wirbelfrei ist. Der Gleichung (16) hingegen wird Genüge getan, wenn die Geschwindigkeitskomponenten Ableitungen einer Funktion  $\varphi(x, y, z)$  nach den Ortskoordinaten sind, wenn also

$$v_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad v_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (17)$$

sind, was sofort nach einer zweiten Ableitung eingesehen wird. Setzen wir nun (17) in die früher erhaltene Kontinuitätsgleichung (11) ein, so erhalten wir die Laplacesche Gleichung. Die Funktion  $\varphi$  nennen wir nach Helmholtz das Geschwindigkeitspotential der Strömung (KAUFMANN 1931). Damit haben wir eine formale Gleichheit zwischen einer Grundwasserströmung bei gleichförmiger Durchlässigkeit und der *wirbelfreien Strömung der idealen Flüssigkeit* festgestellt.

Für einen zweiten Vergleich ziehen wir die *wirbelfreie stationäre Strömung einer zähen Flüssigkeit* heran, für die die Navier-Stokesschen Gleichungen gelten (KAUFMANN 1931),

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho} \cdot \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\varrho} \cdot \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{\varrho} \cdot \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$



in denen  $\eta$  der Zähigkeitskoeffizient ist. Wir nehmen nun an, dass die Flüssigkeit eine sehr grosse Zähigkeit hat und dass die Bewegung langsam vor sich geht, so dass wir die bei der Bewegung auftretenden Trägheitskräfte im linken Gliede vernachlässigen können. Sehen wir weiter von den Massenkraften ab, so erhalten wir nach gewissen Deduktionen (KAUFMANN 1931)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (19)$$

oder die Laplacesche Gleichung. Damit haben wir *formale Gleichheit* zwischen der Grundwasserströmung bei gleichförmiger Durchlässigkeit und der wirbelfreien Strömung der idealen Flüssigkeit festgestellt.

Zu einem dritten Vergleiche ziehen wir die *Strömung der Elektrizität* in einem leitenden Körper heran. Für diese gilt wie bekannt das Ohmsche Gesetz (CHWOLSON 1908). Wie ersichtlich ist, haben wir formale Gleichheit zwischen dem Ohmschen Gesetz und Darcys Satz. Für die Strömung der Elektrizität gilt weiter, wenn die Strömung stationär ist, d. h. wenn sie ohne Spannungsänderung geschieht, die Kontinuitätsgleichung. Folglich gilt für die stationäre Strömung der Elektrizität eine Gleichung, die mit (12) oder, wenn der Widerstand im ganzen Leiter konstant ist, mit (14) analog ist. *Es herrscht also formale Gleichheit zwischen der Grundwasserströmung und der stationären Strömung der Elektrizität.*

Zu einem vierten Vergleiche ziehen wir die Leitung der Wärme in einem Körper heran. Für diese gilt wie bekannt das Fouriersche Gesetz (CHWOLSON 1905). Wie ersichtlich haben wir formale Gleichheit zwischen dem Fourierschen Gesetz und Darcys Satz. Ist die Leitung stationär, d. h. geschieht sie ohne Temperaturänderungen des Körpers, so gilt für sie die Kontinuitätsgleichung. Folglich gilt für die Wärmeleitung eine Gleichung, die mit (12) oder, wenn das Leitungsvermögen im ganzen Körper konstant ist, mit (14) analog ist. *Es besteht also formale Gleichheit zwischen der Grundwasserströmung und der stationären Leitung der Wärme.*

Zu einem fünften Vergleiche ziehen wir die Diffusion in einer Lösung heran. Für diese gilt Berthollets Gesetz vom Jahre 1803 (CHWOLSON 1902). Wie ersichtlich haben wir formale Gleichheit zwischen Berthollets Gesetz und Darcys Satz. Wenn der Diffusionsverlauf stationär, d. h. ohne Konzentrationsänderungen vor sich geht, gilt für ihn die Kontinuitätsgleichung. Folglich gilt für die Diffusion eine Gleichung, die mit (12) oder, wenn die Diffusionskonstante in der ganzen Lösung unveränderlich ist, mit (14) analog ist. *Es besteht also formale Gleichheit zwischen der Grundwasserströmung und der stationären Diffusion.*

Die eben durchgeführten Vergleiche erweisen, dass die Grundwasserströmung mit mehreren im übrigen weit voneinander unterschiedenen Strömungen formale Gleichheit zeigt. Gemeinsam für sie alle ist, dass die Strömungsgeschwindigkeit sich als eine Ableitung der Funktion  $\varphi$  (bei der Grundwasserströmung  $= -kh$ ) nach den Ortskoordinaten ausdrücken lässt.  $\varphi$  nennen wir das Potential der Strömung und die Strömung selbst nennen wir eine Potentialströmung.

### c. Allgemeine Behandlung und Lösung des Problems der Grundwasserströmung.

#### *Allgemeine Behandlung.*

Die Ausdrücke (12) und (14), die sich uns oben als für die Grundwasserbewegung gültig ergeben haben, haben als Integranden die Funktion  $h(x, y, z)$ , d. h. die Funktion, die angibt, wie der Grundwasserstand in der Bodenmasse variiert. Wenn wir für ein bestimmtes Problem diese Integralfunktion gefunden haben, ist das Problem in gewissem Sinne gelöst. Wir können die Flächen  $h(x, y, z) = \text{konst.}$  konstruieren, welche Punkte desselben Grundwasserstandes vereinigen und die wir daher *Grundwasserstandsflächen* nennen können. Ziehen wir Linien normal zu diesen Flächen, so wird, wie leicht einzusehen ist, eine jede von ihnen den Weg eines bestimmten Wasserpartikel durch die Bodenmasse angeben, und wir nennen daher diese Linien *Stromlinien*.

Indessen ist natürlich die Lage der Wasserstandsflächen und der Verlauf der Stromlinien in verschiedenen Fällen verschieden. Bestimmend dafür sind ausser den Durchlässigkeitsverhältnissen der Bodenmasse die an ihren Grenzflächen herrschenden Bedingungen. Diese letzteren können auf verschiedene Weise angegeben werden. Handelt es sich um eine Fläche, durch die das Wasser in die Bodenmasse eintritt oder aus ihr austritt, so kann als Grenzbedingung  $h$  längs der Fläche angegeben werden. Handelt es sich dagegen um eine Fläche, durch die bei der Strömung kein Wasser hindurchgeht und die also als eine undurchlässige Wand betrachtet werden kann, so gilt längs derselben, dass

$$\frac{dh}{dn} \cdot dF = 0$$

ist, wobei  $dF$  ein kleines Flächenelement und  $n$  eine Normale auf dasselbe ist, d. h. hier gilt, dass

$$\frac{dh}{dn} = 0 \quad (20)$$

ist. Wenn die Grenzbedingungen für ein Strömungsbereich in der Weise gegeben sind, dass  $h$  oder  $dh/dn$  für alle seine Grenzflächen gegeben sind, so kann, soweit es sich um eine Potentialströmung handelt, gezeigt werden (LAMB 1932, p. 42), dass  $h$  auch für alle Teile des Inneren des Bereiches eindeutig ist.

Unsere Aufgabe bei der Lösung eines Grundwasserproblems ist es also, zu der Fundamentalgleichung (12) oder (14) eine Integralfunktion zu finden, die gleichzeitig die für das Problem gegebenen Grenzbedingungen erfüllt.

### *Lösungsmethoden.*

*Analytische Lösungsmethoden.* Die erste Methode, die in Frage kommt, wenn es gilt, Integralfunktionen zu (12) oder (14) zu finden, die gewisse Grenzbedingungen erfüllen, besteht darin, dass man die gesuchten Funktionen auf analytischem Wege zu erhalten sucht. Den auf diesem Wege gewonnenen Ergebnissen kann im allgemeinen jede wünschenswerte Exaktheit gegeben werden, und sie eignen sich gut für weitere Untersuchungen. Jedoch stossen wir leider hier oft auf mathematische Schwierigkeiten, die unsere Möglichkeiten weiterzukommen stark einschränken.

Besonders grosse Schwierigkeiten ergeben sich bei der Behandlung von Problemen, die zur Gleichung (12) in ihrer vollständigen Gestalt führen, d. h. von Problemen, bei denen die Durchlässigkeit und die Strömungsgeschwindigkeit mit den drei Koordinatenrichtungen des Raumes nach Grösse und Richtung variieren.

Einfacher liegen die Dinge, wenn der Durchlässigkeitskoeffizient konstant ist und die Voraussetzung besteht, dass die Strömung nur in zwei Koordinatenrichtungen,  $x$  und  $y$ , d. h. in der Ebene vor sich geht.  $v_z$  ist dann  $= 0$ , und wir erhalten als Grundgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (21)$$

Lösungen dieser Gleichung können oft mit ziemlich einfachen Hilfsmitteln erhalten werden. Da wir im allgemeinen annehmen können, dass in dräniertem Boden eine zweidimensionale Strömung vor sich geht, weil wir hier die eventuell parallel zu den Dränungsleitungen verlaufende Strömung vernachlässigen können, wollen wir diese Hilfsmittel zusammenfassend behandeln. Dabei gehen wir von HOLZMÜLLERS (1882) und LOEWENTS (1912) Arbeiten aus, auf die wir auch den für eine ausführlichere Darstellung Interessierten verweisen.

Für die Lösung von (21) bedienen wir uns mit Vorteil gewisser Teile

der Theorie der komplexen Funktionen, so wie sie u. a. RIEMANN (1859) entwickelt hat. Wir setzen dabei voraus, dass  $\varphi$  und  $\psi$  zwei reelle Variablen sind, beide Funktionen der reellen Variablen  $x$  und  $y$ . Wir bilden hieraus die komplexen Variablen  $\varphi + i\psi = \omega$  und  $x + iy = z$  und nehmen an, dass die letztere eine analytische Funktion der ersteren ist, d. h.

$$\varphi + i\psi = \omega = \zeta(z) = \zeta(x + iy). \quad (22)$$

Jedem Werte von  $z$  werden nun je nach der Ein- oder Mehrdeutigkeit der Funktion  $\zeta$  ein oder mehrere Werte von  $\omega$  entsprechen. Das bedeutet, dass jedem Punkte einer komplexen Zahlenebene  $z$  mit den Achsen  $x$  und  $y$  ein oder mehrere Punkte einer anderen komplexen Zahlenebene  $\omega$  mit den Achsen  $\varphi$  und  $\psi$  entsprechen werden. Jedes Bereich der  $z$ -Ebene hat also eine Entsprechung in der  $\omega$ -Ebene und kann, wie man sagt, auf dieser abgebildet werden. Umgekehrt hat jedes Bereich der  $\omega$ -Ebene eine Entsprechung in der  $z$ -Ebene. Die beiden Ebenen können daher aufeinander abgebildet werden.

Wir bilden nun die Ableitung

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{d(\varphi + i\psi)}{d(x + iy)},$$

die auch

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + i \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right)}{dx + i dy} = \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy}{dx + i dy} \quad (23)$$

geschrieben werden kann. Nun kann, wie RIEMANN (1867) gezeigt hat,  $\omega$  eine analytische Funktion von  $z$  nur dann sein, wenn  $d\omega/dz$  von dem Werte des Differentials  $dz$  unabhängig ist. Dies trifft ein, wenn zwischen den beiden Klammerausdrücken auf der rechten Seite von (23) Gleichheit besteht, d. h. wenn

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (24)$$

sind. Diese Ausdrücke, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen heissen (LOEWENT 1912), ergeben nach Multiplikation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (25)$$

Hieraus folgt, dass, wenn wir in unserer  $z$ -Ebene nach dem Obigen die Kurvenscharen  $\varphi = \text{konst.}$  und  $\psi = \text{konst.}$  einzeichnen, diese beiden Scharen in jedem Punkte der Ebene einander winkelmäßig schneiden.

den werden. Das Gleiche erfolgt natürlich, wenn wir sie in der  $\omega$ -Ebene einzeichnen (s. Fig. 5). Allgemein kann gezeigt werden (s. HOLZMÜLLER 1882 und LOEWENT 1912), dass, wenn  $\omega$  eine analytische Funktion von  $z$  ist und wir zwei Kurven der  $z$ -Ebene auf der  $\omega$ -Ebene abbilden, der Winkel zwischen diesen Abbildungen derselbe sein wird wie der zwischen den Kurven selbst. Und weiter, dass die

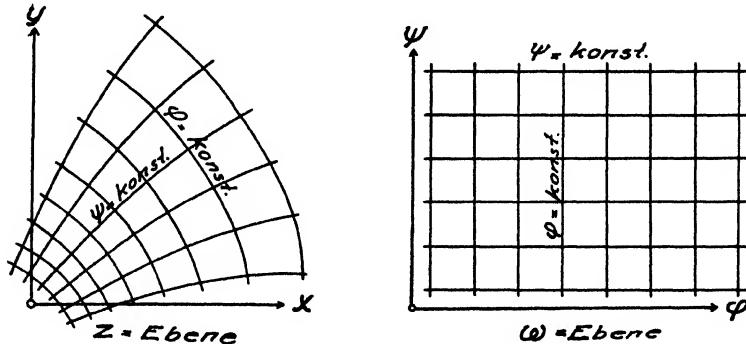


Fig. 5.

Abbildung eines unendlich kleinen Bereiches der  $z$ -Ebene auf der  $\omega$ -Ebene dem betreffenden Bereiche ähnlich sein wird. Man sagt mit Gauss, dass die Abbildung *konform* oder dass sie *isogonal* oder *winkeltreu* ist.

Wir differenzieren nun (24) noch einmal, teils nach  $x$  und teils nach  $y$ , und erhalten dann

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (26)$$

d. h. in beiden Fällen die Laplacesche Gleichung. Daraus ergibt sich, dass zwischen der Theorie der analytischen komplexen Funktionen, so wie sie oben ausgeführt wurde, und unseren aktuellen Strömungsproblemen eine gewisse Verwandtschaft bestehen muss. Von dieser Tatsache können wir in unserem Zusammenhang mit Vorteil Gebrauch machen. Es ist nämlich unmittelbar einzusehen, dass jedem Bilde, das wir erhalten, wenn wir nach dem Obigen in der komplexen Zahlenebene  $z$  die Kurvenschar  $\varphi = \text{konst.}$  einzeichnen, ein Bild entspricht, das wir erhalten, wenn wir für eine bestimmte zweidimensionale Grundwasserströmung in der Strömungsebene die Kurven einzeichnen, die Punkte desselben Grundwasserstandes oder Potentials verbinden, d. h. die Kurven, längs denen  $\varphi = kh = \text{konst.}$  ist. Umgekehrt gilt, dass den Potentiallinien einer bestimmten Strömung in der komplexen

$z$ -Ebene eine gewisse Kurvenschar  $\varphi = \text{konst.}$  entsprechen muss, die erhalten werden kann, wenn man die Abbildungsfunktion  $\zeta$  richtig wählt. Diese Funktion für ein bestimmtes Strömungsproblem zu finden, kann in gewissen Fällen einfach sein. In anderen Fällen sind damit bedeutende Schwierigkeiten verbunden.

Die Kurvenschar  $\varphi = \text{konst.}$  der  $z$ -Ebene schneidet, wie oben hervor gehoben wurde, die Schar  $\varphi = \text{konst.}$  normal in jedem Punkte derselben. Entsprechen also der Schar  $\varphi = \text{konst.}$  die Potentiallinien einer bestimmten Strömung, so muss die Entsprechung der Schar  $\varphi = \text{konst.}$  in der Strömungsebene die Strömungsrichtung in jedem Teile dieser Ebene angeben. Wir nennen diese Entsprechung die Stromlinienschar der Strömung. Für die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  längs einer Stromlinie muss nach (24) gelten, dass  $d\varphi/dn = v$  ist, wenn  $n$  eine Normale auf die Stromlinie ist, d. h.  $d\varphi = v \cdot dn$ . Dies gibt uns den Ausdruck

$$\int_p^q v \cdot dn = \psi_p - \psi_q, \quad (27)$$

woraus folgt, dass die Wertdifferenz zwischen zwei Stromlinien ein Ausdruck für die Wassermenge ist, die in der Tiefe  $l$ , winkelrecht zur Strömungsebene gemessen, zwischen den Linien  $p$  und  $q$  dahinströmt. Damit ist der Stromlinie eine physikalische Bedeutung gegeben.

Wir werden im Folgenden Funktionen von (21) ausführen und werden da Anlass haben, an das eben Gesagte anzuknüpfen und es weiter zu entwickeln.

*Graphische Lösungsmethoden.* Das analytische Verfahren bei der Lösung des Grundwasserproblems stösst oft auf beträchtliche mathematische und rechnungsmässige Schwierigkeiten. Dies gilt vor allem von Problemen, bei denen die Durchlässigkeit mit dem Orte wechselt und eine Strömung in drei Koordinatenrichtungen vorkommt. Aber auch die relativ einfachen zweidimensionalen Probleme, für die Gleichung (21) gilt, können oft auf analytischem Wege schwer zu lösen sein. Deshalb hat man sich für den eben genannten Typus von Problemen mitunter graphischer Lösungsmethoden bedient. Das Prinzip dabei ist, dass ein Netz von Potential- und Stromlinien willkürlich in das Strömungsbereich-Ebene nach den bestehenden Grenzbedingungen eingelegt wird, worauf in irgendeiner geeigneten Weise Ausgleichung erfolgt. Die Methoden sind u. a. von FORCHHEIMER (1930), WEINIG & SHIELDS (1936) sowie BREITENÖDER (1942) entwickelt und bei Lösungen von Grundwasserproblemen verwendet worden. Da wir von ihr im

Folgenden keinen Gebrauch machen werden, wollen wir sie hier nicht näher behandeln.

*Versuche an Bodenmodellen.* Ausser den beiden genannten Verfahrensweisen können wir bei der Lösung des Grundwasserproblems auch auf experimentellem Wege vorgehen, nämlich durch Anstellen von Modellversuchen. Eine brauchbare Methode für solche Modellversuche besteht darin, dass man aus Erde ein Modell des Strömungsgebietes baut, dessen Strömung untersucht werden soll. Wie leicht zu zeigen ist, ist die Strömung, in einem solchen Modell, wenn die Durchlässigkeit nicht mit dem Orte variiert, der gesuchten Strömung ähnlich, falls das Modell mit dem Strömungsgebiet geometrisch ähnlich ist. Um den Verlauf der Strömung im Modell zu konstatieren, kann man sich verschiedener Methoden bedienen. So können Piezometerrohre an verschiedenen Punkten in die Erdmasse eingeführt und an Hand des in ihnen gemessenen Druckes können Gleichdruckflächen, d. h. Potentialflächen, konstruiert werden. Handelt es sich um eine ebene Strömung, so kann die eine Wand des Modells aus Glas angefertigt und der Verlauf der Strömung durch Einführung von Färbemitteln studiert werden. Der Verfasser hat, wie aus dem Folgenden hervorgeht, diese Methode in gewissem Ausmasse angewandt.

Die Methode, mit Hilfe von Erdmodellen die Grundwasserströmung zu studieren, scheint zuerst von OESTEN (1879) gebraucht worden zu sein, der sich derselben beim Studium des Zuflusses zu Brunnen bediente. Sie ist später bei der Behandlung von verschiedenen Grundwasserströmungsproblemen zur Anwendung gekommen, u. a. bei PENNINGK (1909), KOZENY (1927), EHRENBERGER (1928) sowie bei SCHAFERNAK & DACHLER (1934). Wir werden Anlass haben, später auf einige dieser Untersuchungen zurückzukommen.

*Modellversuche mit freier Flüssigkeit.* Wir haben auf (S. 22) hervorgehoben, dass zwischen der Grundwasserbewegung und der laminaren Bewegung einer freien Flüssigkeit formale Gleichheit besteht, wenn der Reibungswiderstand gegen die Bewegung gross ist und die Bewegung langsam erfolgt. Wir erhalten daher, wie später (S. 115) gezeigt werden soll, eine formale Gleichheit zwischen einer zweidimensionalen Grundwasserbewegung und einer langsamen Flüssigkeitsbewegung zwischen zwei planparallelen Platten mit geringem gegenseitigem Abstand und können, wenn wir die letztgenannte Bewegung unter verschiedenen Bedingungen studieren, uns eine Auffassung vom Verlaufe der Grundwasserbewegung unter ähnlichen Bedingungen bilden. Die Methode hat u. a. DACHLER (1936) vorgeschlagen. Wir werden später von ihr Gebrauch machen.

*Modellversuche mit elektrischer Strömung.* Auf S. 22 wurde betont, dass zwischen der Grundwasserbewegung und der elektrischen Strömung formale Gleichheit besteht. Auch diese Gleichheit kann für das Studium der Grundwasserbewegung ausgenützt werden, wobei ein Modell des zu studierenden Strömungsgebietes aus geeignetem elektrisch leitendem Material verfertigt wird. Die Methode, die u. a. von GERBER & ACKERET (1928), PAWLOWSKY (1933), VREDENBURGH & STEVENS (1933) sowie von BRADFIELD, HOOKER & SOUTHWELL (1937), angewendet und entwickelt wurde, soll hier nicht näher diskutiert werden.

### **B. Strömung in einem Boden, in dem freies Wasser nicht vorkommt.**

Wir gehen nun zur Apparatur von Fig. 1 zurück und nehmen an, dass die beiden Niveaufässer ganz von Wasser entleert werden. Das in der Erdsäule vorhandene freie Wasser wird nun aus ihr herausgehen. Das Experiment wird hierauf fortgesetzt, indem man gebundenes Wasser von den beiden Endflächen der Erdsäule verdunsten lässt. Dadurch wird sich dort der Gehalt an kapillarem und an die Bodenkornflächen gebundenem Wasser des Bodens vermindern. Da die kleinen Kapillaren an der Bodenoberfläche auf diese Weise Wasser verlieren, werden sie neues Wasser von gröberen Kapillaren an sich saugen, diese ihrerseits von noch gröberen usw. Wir erhalten auf diese Weise bei dem im Boden kapillar gebundenen Wasser eine Strömung. Die eben genannte Bewegung ist seit langem bekannt gewesen. Wenn weiter das an die Fläche der Bodenkörner gebundene Wasser an den Enden der Erdsäule sich vermindert, entsteht an diesen eine wasserattrahierende Kraft, die umso grösser wird, je mehr Wasser weggenommen wird. Hierdurch werden diese Partikel instandgesetzt, von ihren wasserreicheren Nachbarn Wasser zu sich zu nehmen, diese wiederum nach und nach von anderen Nachbarn usw. So kommt bei dem an die Fläche der Bodenkörner gebundenen Wasser eine Strömung zustande. Dieser Strömung hat man erst in letzter Zeit Beachtung geschenkt. Ihr Verlauf ist u. a. von VAGELER (1936) studiert worden. Der Prozess dürfte neben der eben genannten Kapillarbewegung bei der Bewegung des gebundenen Wassers im Boden eine beträchtliche Rolle spielen (LAATSCH 1938, S. 92 ff.).

Wir erzielen auf die beiden eben genannten Arten eine Bewegung des im Boden gebundenen Wassers, wobei die Strömung von Punkten der Bodenmasse mit höherem Wassergehalt zu Punkten erfolgt, wo dieser geringer ist.



Die eben genannte Strömung des gebundenen Wassers hat BUCKINGHAM (1907) zum Studium aufgenommen. Von ihm wurde der Begriff »capillary potential« für die wasserattrahierende Kraft eines trockenen Bodens eingeführt. Buckingham arbeitete mit der Hypothese, dass die zwischen zwei Punkten einer Bodenmasse in der Zeiteinheit beförderte Wassermenge  $Q$  mit der zwischen den Punkten bestehenden Differenz des »capillary potential«,  $\Phi$ , direkt und mit dem gegenseitigen Abstand  $s$  der Punkte umgekehrt proportional sei, d. h.

$$Q = M \cdot \frac{d\Phi}{ds}. \quad (28)$$

Indessen zeigten Buckinghams eigene Untersuchungen, dass  $M$ , das das Leitungsvermögen des Bodens für Wasser in sich schliesst, keineswegs konstant ist, sondern stark mit dem Wassergehalt des Bodens variiert, der seinerseits  $\Phi$  bestimmt. Die Buckinghamsche Gleichung eignet sich daher nicht dazu, für den weiteren Ausbau dynamischer Probleme als Grundlage zu dienen. Derartige auf ihr fussende Entwicklungen sind auch nicht vorgekommen. Dagegen ist der Buckinghamsche Begriff »capillary potential« in verschiedenen Zusammenhängen aufgegriffen worden, in denen man an seine Verknüpfung mit  $Q$  nicht gebunden war. So hat SCOFIELD (1935) den Zusammenhang zwischen dem Wassergehalt des Bodens und dem »capillary potential« studiert. Dabei hat es sich ihm als bequemer herausgestellt, mit dem Logarithmus des »capillary potential« des Bodens zu arbeiten, der in Zentimetern Wassersäule ausgedrückt war, und er hat diesem neuen Begriff den Namen pF-Wert des Bodens gegeben. SCOFIELD ist es durch Untersuchungen des genannten Zusammenhanges gelungen, das Verhältnis verschiedener Bodenarten zu Wasser erfolgreich zu charakterisieren (s. ROBINSON 1936).

Eine andere Annahme über die Bewegung des gebundenen Wassers haben CHILDS (1936) und NICHOLSON & CHILDS (1936) gemacht, die voraussetzen, dass zwischen dem an zwei Punkten einer Bodenmasse vorhandenen Unterschiede an Wassergehalt,  $\Theta$  und  $Q$  direkte Proportionalität bestehe, nach dem Ausdrucke

$$Q = N \cdot \frac{d\Theta}{ds}, \quad (29)$$

wobei  $s$  wie früher der gegenseitige Abstand der Punkte ist. Auch hier steigt ja das Leitungsvermögen des Bodens mit steigendem  $\Theta$ , aber Childs meint, dass dies dadurch aufgewogen werde, dass die Saugkraft des Bodens mit  $\Theta$  abnehme, weshalb  $N$  in (29) als konstant betrachtet

werden könne. Childs hat seinem Ausdruck recht weitgehende Deduktionen zu Grunde gelegt und auch seine auf theoretischem Wege erhaltenen Ergebnisse mit den empirischen Daten anderer Forscher verglichen, wobei sich recht gute Übereinstimmung ergab. Childs Ausdruck müsste jedoch noch Gegenstand weiterer experimenteller Untersuchungen sein, bevor seine Gültigkeit als gesichert betrachtet werden kann.

### III. Die Bewegung des Wassers in gedräntem Boden.

#### 1. Strömung in völlig wassergefülltem gedräntem Boden.

Wir wollen zunächst die Strömung behandeln, die in einem gedränten Boden vor sich geht, dessen sämtliche Poren bis zur Erdoberfläche mit Wasser gefüllt sind. In Wirklichkeit kann dies nur für gewisse Gelegenheiten angenommen werden, wenn die Wasserzufuhr durch Lösung des Bodenfrostes und durch Schneeschmelze oder durch Niederschläge sehr gross ist. Bei diesen Anlässen, die verhältnismässig selten eintreten und ausserdem von kurzer Dauer sind, wird jedoch das Dränsystem maximalen Beanspruchungen ausgesetzt, weshalb die Art, wie es dann arbeitet, von besonderem Interesse ist.

#### *A. Strömung in völlig wassergefülltem gedräntem Boden mit homogener Durchlässigkeit.*

##### *a. Theoretische Behandlung.*

Wir wollen anfangs die Strömung in einem völlig wassergefüllten Boden behandeln, in dem die Durchlässigkeit der ganzen Bodenmasse als konstant angenommen wird. Eine derartige Annahme dürfte allerdings in der Wirklichkeit nur selten gemacht werden können. Haben wir es etwa mit einem kultivierten Tonboden zu tun, so müssen wir damit rechnen, dass die Durchlässigkeit stark wechselt. So hat die oberste, bearbeitete und humusreichere Schicht gewöhnlich bedeutend grössere Durchlässigkeit als tiefere Horizonte, und ebenso hat, wie FLODKVIST (1931, 1935) gezeigt hat, Tonboden, der durch Umgraben in seiner natürlichen Lagerung gestört worden ist, grössere Durchlässigkeit als nicht umgegrabener Boden der gleichen Art.

Auch in nicht tonhaltigen Mineralböden, wie Schluff-, Mo- und Sandböden, dürfte die Durchlässigkeit von Punkt zu Punkt eines durch die Bodenmasse gelegten Vertikalschnittes wechseln, auch wenn die

Schwankungen hier bedeutend geringer sind als im Tonboden (s. S. 133). Das Gleiche dürfte in organogenen Böden der Fall sein.

Wenn wir trotzdem die Annahme einer konstanten Durchlässigkeit machen, so hat das seinen Grund darin, dass wir durch diese Vereinfachungen der Voraussetzungen instand gesetzt werden, den Strömungsverhältnissen wirklich nahe zu kommen und Gesetzlichkeiten von genereller Gültigkeit nachzuweisen.

Auf der Grundlage früherer Untersuchungen können wir uns in groben Zügen eine Auffassung vom Verlauf der Strömung machen. So geben uns schon OESTENS (1879) Modellversuche über den Zufluss zu Brunnen Anlass zur Annahme, dass die Strömung von der Erdoberfläche zur Leitung in bogenförmigen Linien vor sich geht, sowie dass ein gewisser Teil des Wassers, bevor er die Leitung erreicht, Niveaus zu passieren hat, die tiefer als diese liegen. Dass das der Fall ist, hat ausserdem auch GERHARDT (1891) hervorgehoben. Weiter wurde diese Annahme durch Felduntersuchungen und Modellversuche über die Strömung des Wassers zu offenen Kanälen gestützt, die PENNINGK (1909) durchgeführt hatte. Schliesslich hat KOZENY (1927) durch Modellversuche gezeigt, dass die Strömung auf die genannte Weise vor sich geht. Systematische Untersuchungen über den Strömungsverlauf sind indessen niemals angestellt worden.

*Strömung, wenn nur eine vom Dränsystem bedingte  
Wasserbewegung vorkommt.*

Wir gehen zunächst davon aus, dass die Dinge so liegen, dass das Grundwasser des Bodens, wenn dieser nicht gedrängt ist, als stillstehend betrachtet werden kann. Irgendeine Form von »Selbstdrängung« und dadurch bedingter Strömung, im Folgenden *Primärströmung* genannt, kommt also nicht vor. Wird ein solcher Boden gedrängt, so wird die Wasserbewegung in demselben einzig und allein von dem eingelegten Dränsystem bestimmt werden. Eine Sachlage wie die eben geschilderte kann angenommen werden, wenn z. B. ein grösseres Bodengebiet mit horizontaler Lage vorhanden und der Boden nach unten hin von einem undurchlässigen Erdlager begrenzt ist.

*Strömung zu einer einzelnen Dränleitung.*

Wir nehmen nun an, dass wir in einen Boden der oben geschilderten Art mit grosser Ausdehnung nach der Seite hin zunächst eine einzelne Dränleitung einlegen. Diese sei, so nehmen wir an, so beschaffen, dass entsprechende Längenteile derselben aus dem Boden dieselbe Wasser-

menge aufnehmen. Die eben genannte Voraussetzung dürfte als gegeben betrachtet werden können, wenn die Leitung konstante Dimension hat und, wie das in der Praxis oft der Fall ist, von einem Kiesmantel umgeben ist. Weiter nehmen wir an, dass die Bodenfläche eben und horizontal und dass die Leitung parallel zu ihr in der Tiefe  $T$ , vom oberen Rande der Leitung an gerechnet, gelegt sei (s. Fig. 6). Nach unten hin sei die Grundwasser führende Bodenmasse von einem undurchlässigen horizontalen Erdlager begrenzt, das in der Tiefe  $c$  unter der Bodenfläche gelegen sei. Wir fragen, welche Strömungen diese Leitung verursachen wird. Das Problem dürfte allerdings in der Praxis nur von einer sehr begrenzten Bedeutung sein, weil man, wenn ein grösseres Bodenareal vorliegt, immer mehrere miteinander parallele Leitungen einlegt, aber da bei dieser Fragestellung die Lösung verhältnismässig einfach ist und uns eine Grundlage gibt, auf der wir später zur Behandlung anderer komplizierteren und sich an die praktischen Verhältnisse näher anschliessenden Strömungen weiterbauen können, soll sie hier erörtert werden.

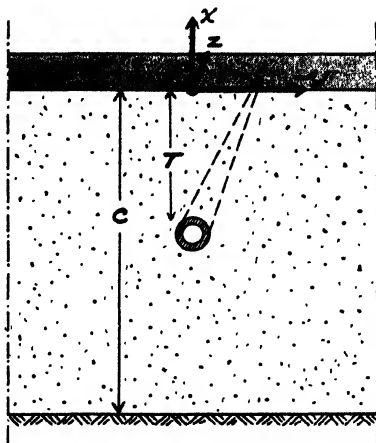


Fig. 6.

Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Koordinatenmittelpunkt in der Erdoberfläche irgendwo gerade oberhalb der Leitung und dessen  $z$ -Achse parallel zur Leitung liegt und dessen übrige Achsen so gehen wie Fig. 6 zeigt. Die Strömung geht nun in Ebenen vor sich, die mit der  $xy$ -Ebene parallel sind, und für sie gilt die Gleichung (21), die unter Berücksichtigung der in den Grenzen des Strömungsbereiches bestehenden Verhältnisse gelöst werden muss.

*Strömung bei grossem Abstand zwischen der Bodenfläche und dem nach unten hin begrenzenden undurchlässigen Lager.* Wir setzen zunächst voraus, dass der Abstand zwischen der Bodenfläche und dem nach unten hin begrenzenden undurchlässigen Lager im Verhältnis zur Dräntiefe sehr gross ist. Ist das der Fall, so können wir annäherungsweise die Einwirkung des Lagers, soweit es als Grenze des Strömungsbereiches in Betracht kommt, auf das Strömungsbild vernachlässigen. Man kann nun sagen, dass die Grenzen des Strömungsbereiches nur aus der Bodenoberfläche und der Peripherie der Leitung bestehen.

In den verschiedenen Punkten der Bodenoberfläche haben wir denselben Grundwasserstand, weshalb wir dieselbe als eine Potentialfläche betrachten können. Das Gleiche gilt für die Peripherie der Leitung,

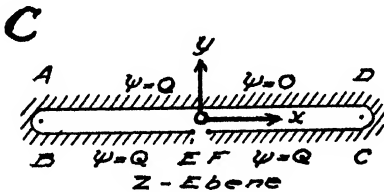
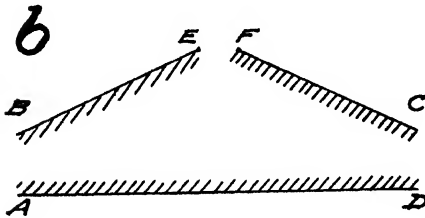
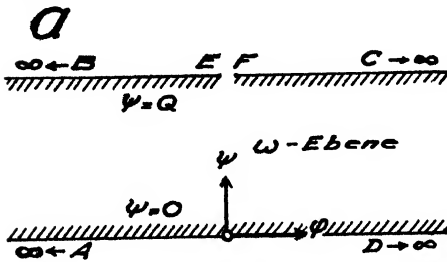


Fig. 7.

wenn diese — wie das bei Maximalbelastung der Fall sein muss, sobald nicht Überdimensionierung vorliegt — vollläuft. Weitere zu berücksichtigende Grenzbedingungen liegen nicht vor.

Um die Grundgleichung (21) mit Berücksichtigung der eben genannten Grenzbedingungen zu lösen, betrachten wir ein Rechteck  $ABCD$  in einer komplexen Zahlenebene. Die Ebene, die wir  $\omega$  nennen, habe die Achsen  $\varphi$  und  $\psi$ , und das Rechteck sei von den Linien  $\varphi = -\infty$ ,  $\varphi = +\infty$ ,  $\psi = 0$  und  $\psi = Q$  begrenzt (Fig. 7 a). Wir versuchen nun dieses Rechteck auf einer anderen Zahlenebene  $z$  abzubilden, die die Achsen  $x$  und  $y$  hat, wobei wir darauf achten, dass die Eckpunkte des Rechteckes  $A$  und  $B$  bzw.  $C$  und  $D$  in zwei Punkten der reellen Achse der

$z$ -Ebene zu liegen kommen, die die Koordinaten  $-a$  und  $+a$  haben, und dass die Rechteckseite  $AD$  mit dem zwischen den Punkten gelegenen Teil der genannten Achse zusammenfällt. Weiter brechen wir bei der Abbildung das Rechteck in dem Punkte  $EF$  auf und übertragen die Seitenstücke  $BE$  und  $CF$  in der Weise auf die  $z$ -Ebene, dass sie in dieser längs der Unterseite der reellen Achse zwischen den Punkten  $-a$  und  $+a$  zu liegen kommen (vgl. Fig. 7 a, b und c).

Wir suchen nun die zur Abbildung gehörende Abbildungsfunktion. Hierbei können wir mit Vorteil einen allgemeinen von CHRISTOFFEL (1867) und SCHWARZ (1869) aufgestellten Polygonabbildungssatz anwenden. Da die in Frage stehende Funktion indessen in der mathematischen Literatur (s. z. B. LEWENT 1912, p. 24) angegeben ist, ist es nicht nötig, eine solche Deduktion hier durchzuführen. Wir stellen nur fest, dass die Funktion

$$\omega = C_1 \int \frac{dz}{z^2 - a^2} + C_2 = \frac{C_1}{2a} \ln \frac{z-a}{z+a} + C_2 \quad (30)$$

lautet, ein Ausdruck, der nach den Rechnungsregeln für komplexe Zahlen (s. z. B. HUNTHINGTON 1918) auch

$$\omega = \varphi + i\psi = \frac{C_1}{2a} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} + i \left( \arctg \frac{y}{x-a} - \arctg \frac{y}{x+a} \right) \right] + C_2 \quad (31)$$

geschrieben werden kann.

In diesem Ausdruck sind die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  unbekannt. Wenn wir jedoch die Sachlage längs der  $x$ -Achse in der  $z$ -Ebene betrachten, können wir sie bestimmen. Links von  $-a$  muss also  $\psi = Q/2$  sein. Dies ergibt durch Einsetzen in (31)  $C_2 = i \cdot Q/2$ . Weiter ist  $\psi$  zwischen  $-a$  und  $+a = 0$ , was in gleicher Weise uns  $C_1/2a = -Q/2\pi$  ergibt. Setzen wir die erhaltenen Werte in (31) ein und trennen wir die reellen und imaginären Glieder voneinander, so erhalten wir schliesslich

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi} \ln \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}; \quad \psi = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \left( \arctg \frac{y}{x-a} - \arctg \frac{y}{x+a} \right); \quad (32)$$

ein Ausdruck, der uns die Möglichkeit gibt, auf der oberen Halbebene  $z$  die Trajektorien  $\varphi$  bzw.  $\psi = \text{konst.}$  einzutragen. (32) lässt sich nach einfacher Umformung folgendermassen schreiben

$$\left| x-a \frac{1 + e^{\frac{4\pi\varphi}{Q}}}{1 - e^{\frac{4\pi\varphi}{Q}}} \right|^2 + y^2 = a^2 \left( \frac{2e^{-\frac{2\pi\varphi}{Q}}}{1 - e^{-\frac{4\pi\varphi}{Q}}} \right)^2; \quad (33)$$

$$x^2 + \left[ y - a \cot \frac{2\pi}{Q} \left( \psi - \frac{Q}{2} \right) \right]^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \frac{2\pi}{Q} \left( \psi - \frac{Q}{2} \right)};$$

woraus sich direkt ergibt, dass die betreffenden Kurvenscharen aus Kreisen bestehen, wobei die erste Schar die reelle Achse, die zweite die imaginäre Achse zum geometrischen Ort der Mittelpunkte hat. Der Verlauf der Kurven ist aus Fig. 8 zu ersehen.

Das erhaltene Bild kann als anschauliche Darstellung einer Grundwasserströmung gelten, die in einer unendlich ausgedehnten Bodenmasse von einer in  $+a$  gelegenen Linie zu einer zweiten in  $-a$  gelegenen Linie geht und in der Zeiteinheit die Wassermenge  $Q$  zuführt. Der linke Teil des Bildes stellt jedoch auch eine Grundwasserströmung von einer unendlich ausgedehnten ebenen Potentialfläche ( $\varphi = 0$ ) zu einer mit ihr parallel laufenden zylindrischen dar (einer der Kreise

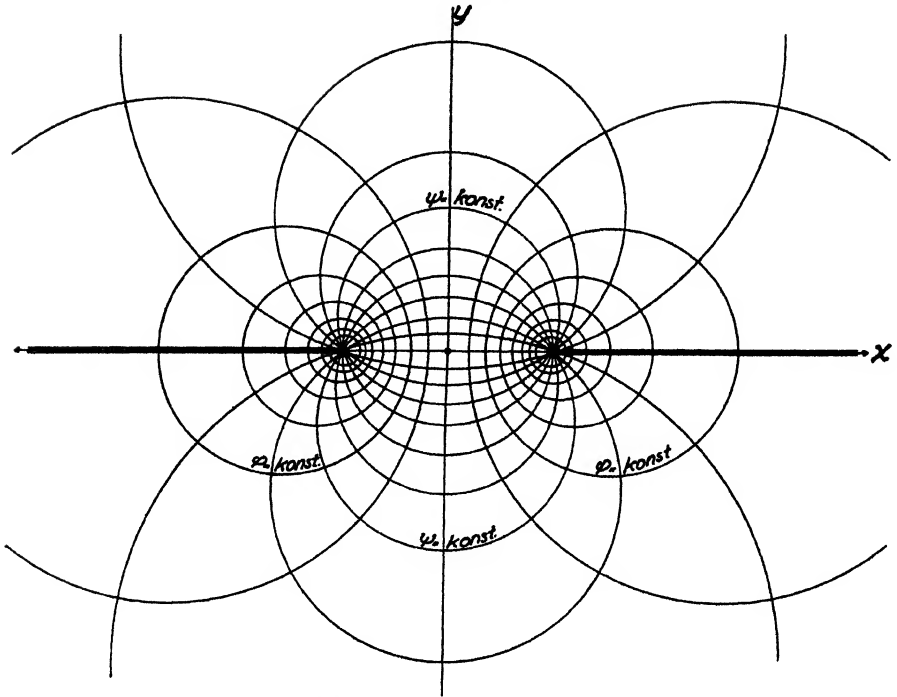


Fig. 8. Konforme Abbildung, die (30) entspricht.

links von der  $y$ -Achse). Damit stellt er auch unsere gesuchte Strömung zu einer einzelnen Dränleitung dar. Das von uns gesuchte Strömungsbild können wir also mit Hilfe von (32) und (33) zeichnen, doch erst, wenn wir Angaben über die darin enthaltenen Konstanten  $a$  und  $Q$  erhalten haben.

Um  $a$  und  $Q$  zu erhalten, müssen wir die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten der Bodenmasse, d. h. den Unterschied des Grundwasserstandes an den Punkten, und den Durchlässigkeitskoeffizienten kennen. Dann erhalten wir  $a$  und  $Q$  durch Einsetzen in (32) und (33). Verursacht z. B. die Leitung eine Verminderung  $= h$  des Grundwasserstandes, von der Bodenfläche zur Peripherie der Leitung gerechnet, ist weiter die Durchlässigkeit  $= k$ , der Radius der Leitung  $= R$  und die Dräntiefe, bis zum oberen Rande der Leitung gerechnet,  $= T$ , so erhalten wir unter Berücksichtigung, dass  $\varphi = kh$ :

$$a = \frac{T \left[ 2 + \frac{T}{R} - \sqrt{\left( \frac{T}{R} \right)^2 + 2 \frac{T}{R}} \right]}{-\frac{T}{R} + \sqrt{\left( \frac{T}{R} \right)^2 + 2 \frac{T}{R}}}; \quad Q = \frac{-2 \pi k h}{\ln \left[ 1 + \frac{T}{R} - \sqrt{\left( \frac{T}{R} \right)^2 + 2 \frac{T}{R}} \right]}. \quad (34)$$

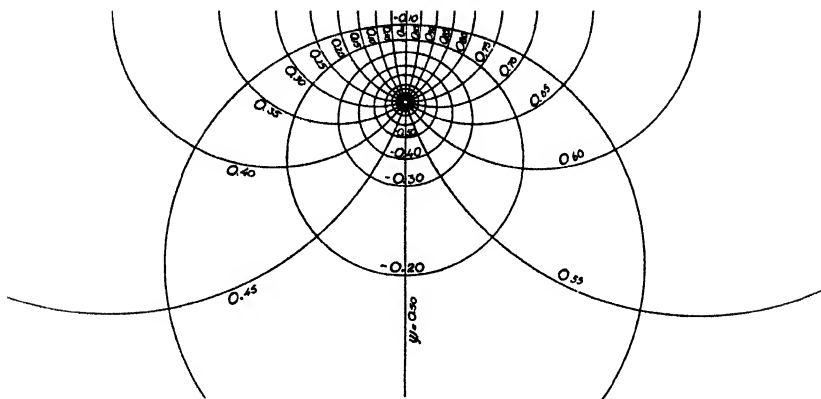


Fig. 9. Von einer einzelnen Dränleitung verursachte Strömung in einer ganz wasser-gefüllten, nach ihrer Durchlässigkeit homogenen Bodenmasse mit grosser Ausdehnung nach der Seite und der Tiefe hin.

Ist der Durchmesser der Röhre im Verhältnis zur Dräntiefe klein, was ja in der Praxis der Fall ist, so kann  $a$ , wie (34) zeigt, mit guter Annäherung  $= T + R$  gesetzt werden, d. h. der Punkt  $a$  kommt in den Mittelpunkt der Leitung zu liegen.

Nach Berechnung von  $a$  und  $Q$  kann das Strömungsbild gezeichnet werden. In Fig. 9 ist das Aussehen desselben zu finden, unter der Annahme, dass die Dräntiefe 20 mal grösser ist als der Durchmesser der Röhre. Die Stromlinien sind so gezogen, dass  $1/20$  der totalen Wassermenge zwischen zwei derselben dahinströmt, und die Potentiallinien in der Weise, dass die Verminderung des Grundwasserstandes bzw. des Potentials zwischen zwei von ihnen  $1/10$  der totalen Verminderung beträgt, die durch das Einlegen der Leitung entsteht.

Legen wir also eine einzelne Dränleitung in eine in Bezug auf Durchlässigkeit homogene, völlig wassergefüllte Bodenmasse ein, die im Vergleich zur Dräntiefe nach der Tiefe und nach der Seite hin grosse Ausdehnung hat, und ist das Wasser in dieser Bodenmasse vor Einlegung der Leitung stillstehend, so wird sich das Wasser von der Bodenfläche zur Leitung in Bahnen bewegen, die Teile von Kreisen darstellen. Verbinden wir Punkte mit demselben Grundwasserstand, so bilden auch diese Verbindungslinien Kreise, die rund um die Leitung gehen. Das Wasser, das auf seinem Wege zur Leitung, in den Boden an einem Punkte einströmt, dessen Entfernung von einem Punkt gerade oberhalb der Leitung grösser ist als die Dräntiefe, muss, bevor der Leitung erreicht wird, Bodenlager passieren, die tiefer liegen als dieser.



*Strömung bei geringerem Abstand zwischen der Bodenfläche und dem nach unten hin begrenzenden undurchlässigen Lager.* Wir setzen jetzt voraus, dass der Abstand  $c$  zwischen der Bodenfläche und dem nach unten hin begrenzenden undurchlässigen Lager in Fig. 6 im Verhältnis zur Dräntiefe so klein ist, dass das Lager in seiner Eigenschaft als Grenze des Strömungsbereiches auf das Strömungsbild Einfluss hat. Das Strömungsbereich wird also nicht nur von der Bodenfläche und der Peripherie der Leitung als Potentialfläche begrenzt, sondern ausserdem noch von einer zu der Bodenfläche parallel laufenden Wand.

Die Abbildungsfunktion, die nun der Strömung entspricht, können wir auf mehreren verschiedenen Wegen erhalten. Einer davon ist der folgende.

Nehmen wir an, dass wir in eine unendlich ausgedehnte wassergefüllte Bodenmasse zwei parallele Dränleitungen mit einem Durchmesser einlegen, der im Verhältnis zu ihrem gegenseitigen Abstand klein ist, und nehmen wir an, dass wir Wasser durch die eine Leitung

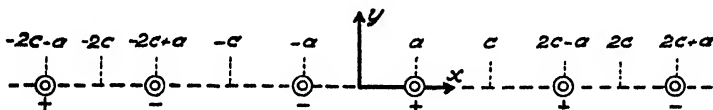


Fig. 10.

zuführen und es durch die andere Leitung ableiten, so entsteht in der Bodenmasse eine Strömung, deren Verlauf durch das der Gleichung (30) entsprechende Bild von Fig. 8 veranschaulicht wird. Wir nehmen nun an, dass wir in dieselbe Bodenmasse und in dieselbe Ebene, in die wir das erste Leitungspaar gelegt haben, andere ähnliche Leitungspare einlegen. Jedes Paar verursache, so nehmen wir an, die gleiche Strömungsintensität wie das erste Paar. Weiter sei jedes Paar um die Entfernung  $2c$  im Verhältnis zu seinen nächsten Nachbarpaaren verschoben und in Bezug auf sein Strömungsbild zu diesen spiegelbildlich (Fig. 10). In jedem Punkte der Bodenmasse verursachen nun die eingelegten Leitungspare einen Summenwert von  $\varphi$  und  $\psi$ , der, wie sich uns mit Ausgangspunkt von (30) ergibt, gleich ist

$$\begin{aligned} \omega = & \left( i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z-a}{z+a} \right) + \left( -i \frac{Q}{2} + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z-a+2c}{z+a+2c} \right) + \\ & + \left( -i \frac{Q}{2} + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z-a-2c}{z+a-2c} \right) + \left( i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z-a+4c}{z+a+4c} \right) + \\ & + \left( i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z-a-4c}{z+a-4c} \right) + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Wir können schreiben

$$\begin{aligned} \omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} & \left[ \ln \frac{z-a}{z+a} - \ln \frac{z-a+2c}{z+a+2c} + \right. \\ & + \sum_{m=1}^{m=\infty} \left( \ln \frac{z-a+4mc}{z+a+4mc} + \ln \frac{z-a-4mc}{z+a-4mc} - \ln \frac{z-a+2c+4mc}{z+a+2c+4mc} - \right. \\ & \quad \left. \left. - \ln \frac{z-a+2c-4mc}{z+a+2c-4mc} \right) \right] = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \left[ \ln \frac{z-a}{z+a} - \right. \\ & \quad \left. - \ln \frac{z-a+2c}{z+a+2c} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \ln \frac{[(z-a)^2 - (4mc)^2][(z+a+2c)^2 - (4mc)^2]}{[(z+a)^2 - (4mc)^2][(z-a+2c)^2 - (4mc)^2]} \right] \end{aligned}$$

oder

$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \cdot$$

$$\ln \frac{\frac{\pi}{4c}(z-a) \prod_{m=1}^{m=\infty} \left\{ 1 - \left[ \frac{\frac{\pi}{4c}(z-a)}{m\pi} \right]^2 \right\}}{\frac{\pi}{4c}(z+a) \prod_{m=1}^{m=\infty} \left\{ 1 - \left[ \frac{\frac{\pi}{4c}(z+a)}{m\pi} \right]^2 \right\}} \cdot \frac{\frac{\pi}{4c}(z+a+2c) \prod_{m=1}^{m=\infty} \left\{ 1 - \left[ \frac{\frac{\pi}{4c}(z+a+2c)}{m\pi} \right]^2 \right\}}{\frac{\pi}{4c}(z-a+2c) \prod_{m=1}^{m=\infty} \left\{ 1 - \left[ \frac{\frac{\pi}{4c}(z-a+2c)}{m\pi} \right]^2 \right\}}$$

was sich nach dem Produktenentwicklungssatz für die Sinusfunktion (s. z. B. WHITTAKER & WATSON 1920)

$$\begin{aligned} \omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln & \frac{\sin \frac{\pi}{4c}(z-a) \cdot \sin \left[ \frac{\pi}{4c}(z+a) + \frac{\pi}{2} \right]}{\sin \frac{\pi}{4c}(z+a) \cdot \sin \left[ \frac{\pi}{4c}(z-a) + \frac{\pi}{2} \right]} = \\ & = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \cdot \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c}(z-a)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c}(z+a)} \quad (36) \end{aligned}$$

schreiben lässt.

Wir trennen hier reelle und imaginäre Teile voneinander. Setzen wir der Kürze halber

$$\frac{\pi}{4c}(x-a)=p; \quad \frac{\pi}{4c}(x+a)=q; \quad \frac{\pi}{4c}y=r, \quad (37)$$

so können wir schreiben

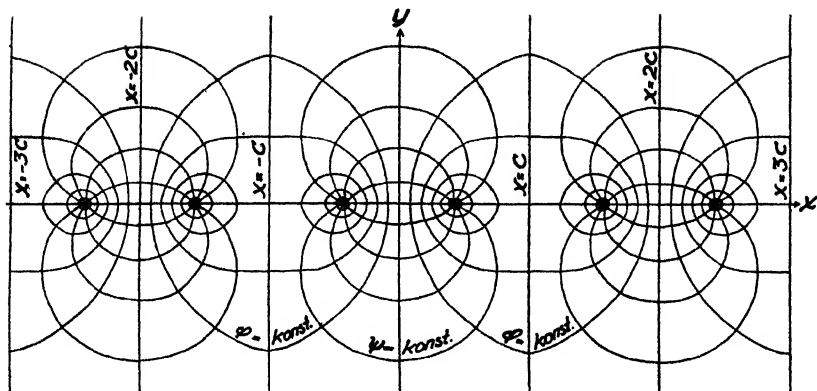


Fig. 11. Konforme Abbildung, die (36) entspricht.

$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{tg}(p+ir)}{\operatorname{tg}(q+ir)} = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\frac{\operatorname{tg} p + i \operatorname{tgh} r}{1 - i \operatorname{tg} p \cdot \operatorname{tgh} r}}{\frac{\operatorname{tg} q + i \operatorname{tgh} r}{1 - i \operatorname{tg} q \cdot \operatorname{tgh} r}},$$

woraus man

$$\psi = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tgh} r}{\operatorname{tg} p} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{tg} p \cdot \operatorname{tgh} r) - \right. \\ \left. - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tgh} r}{\operatorname{tg} q} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{tg} q \cdot \operatorname{tgh} r) \right]$$

oder

$$\psi = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sinh \frac{\pi}{2c} y}{\sin \frac{\pi}{2c} (x-a)} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sinh \frac{\pi}{2c} y}{\sin \frac{\pi}{2c} (x+a)} \right] \quad (38)$$

als Strömlinienfunktion erhält.

Weiter erhält man

$$\varphi = - \frac{Q}{4\pi} \ln \frac{(\operatorname{tg}^2 p + \operatorname{tgh}^2 r)(1 + \operatorname{tg}^2 q \cdot \operatorname{tgh}^2 r)}{(\operatorname{tg}^2 q + \operatorname{tgh}^2 r)(1 + \operatorname{tg}^2 p \cdot \operatorname{tgh}^2 r)} = \\ = - \frac{Q}{4\pi} \ln \frac{(\cosh 2r - \cos 2p)(\cosh 2r + \cos 2q)}{(\cosh 2r + \cos 2p)(\cosh 2r - \cos 2q)}$$

oder

$$\varphi = - \frac{Q}{4\pi} \cdot \ln \frac{\left[ \cosh \frac{\pi}{2c} y - \cos \frac{\pi}{2c} (x-a) \right] \left[ \cosh \frac{\pi}{2c} y + \cos \frac{\pi}{2c} (x+a) \right]}{\left[ \cosh \frac{\pi}{2c} y + \cos \frac{\pi}{2c} (x-a) \right] \left[ \cosh \frac{\pi}{2c} y - \cos \frac{\pi}{2c} (x+a) \right]} \quad (39)$$

als Potentiallinienfunktion.

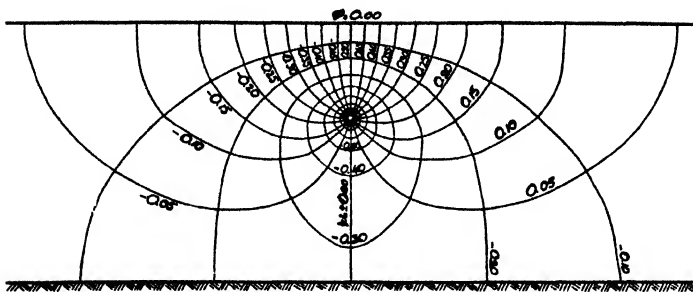


Fig. 12. Von einer einzelnen Dränleitung verursachte Strömung in einer ganz wassergefüllten, nach ihrer Durchlässigkeit homogenen Bodenmasse, mit grosser Ausdehnung nach der Seite.

Zeichnen wir nun in der Strömungsebene die Kurvenscharen ein, die nach (38) und (39)  $\varphi$  und  $\psi = \text{konst.}$  entsprechen, so erhalten wir das Strömungsbild, das die Leitungen hervorbringen. Das Strömungsbild ist auf Fig. 11 wiedergegeben.

Jeder Teil des gefundenen Bildes, der rechts von den Linien  $x = 2mc$  und links  $x = (2m + 1)c$  begrenzt wird, kann jetzt, wie unmittelbar eingesehen wird, als anschauliche Darstellung einer Strömung von einer ebenen Potentialfläche zu einer zylindrischen betrachtet werden, wenn die Strömung von einer zu der ebenen Fläche parallel laufenden Wand begrenzt wird. Das Bild entspricht also auch unserem gesuchten Strömungsbild. Die Entsprechung ist jedoch vom theoretischen Standpunkt nicht vollständig, weil die zylindrischen Potentialflächen nicht kreiszylindrisch, sondern abgeplattet sind und deshalb unserer als kreiszylindrisch angenommenen Leitung nicht entsprechen. Die Abweichung ist jedoch, wenn der Durchmesser der Leitung im Verhältnis zur Dräntiefe und zur Tiefe des undurchlässigen Lagers, von der Leitung aus gerechnet, klein ist, unbedeutend und kann für praktische Rechnungen vernachlässigt werden.

Wir können also (38) und (39) für die Konstruktion unseres gesuchten Bildes verwenden. Die darin enthaltene Konstante  $Q$  erhalten wir, wenn wir  $k$  und den Unterschied des Wasserstandes zwischen zwei Punkten des Strömungsbereiches, z. B. zwischen der Bodenfläche und der Peripherie der Leitung, kennen.

In Fig. 12 ist ein Strömungsbild konstruiert worden unter der Annahme, die Leitung liege derart, dass  $a$  (dem Abstand von der Bodenfläche zur Mittellinie der Leitung sehr nahekommend) der 1:2,5-ste Teil des Abstandes  $c$  der Bodenfläche von dem undurchlässigen Lager ist, sowie dass der Durchmesser der Leitung  $1/20 a$  ist.

### Strömung zu mehreren Dränleitungen.

Wir nehmen jetzt an, dass wir in eine völlig wassergefüllte Bodenmasse mit grosser Ausdehnung nach den Seiten hin nicht eine, sondern mehrere untereinander parallele Leitungen einlegen, die sämtlich zur Bodenfläche parallel laufen. Wir haben damit einen Fall erhalten, der grössere Übereinstimmung mit der Praxis zeigt als der vorhergehende, da ja eine grössere Bodenfläche im allgemeinen auf diese

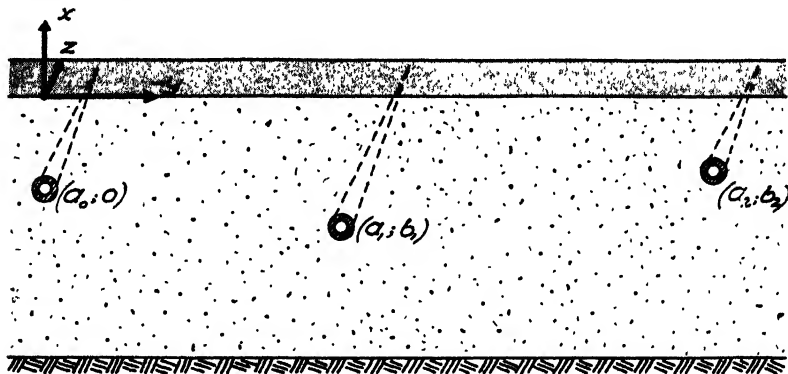


Fig. 13.

Weise entwässert wird. Wie vorher legen wir ein Koordinatensystem, dessen Mittelpunkt in der Bodenfläche gerade über einer der Leitungen liegt, dessen  $z$ -Achse parallel mit diesen läuft und dessen  $x$ - und  $y$ -Achsen wie in Fig. 13 verlaufen.

Wir nehmen an, dass in diesem Koordinatensystem die Mittellinien der Leitungen die Koordinaten  $(a_0; o)$ ,  $(a_1; b_1)$ ,  $(a_2; b_2)$ , ...  $(a_n; b_n)$  haben sowie dass ihr Durchmesser im Verhältnis zur Dräntiefe, dem Dränabstand und dem Abstand zu dem undurchlässigen Bodenlager  $c$  klein ist.

Wir nehmen nun an, dass die einzelnen Leitungen in der Zeiteinheit die Wassermengen  $Q_0, Q_1, Q_2 \dots Q_n$  abführen. An jedem Punkt der Bodenmasse bewirken sie dadurch einen Wert von  $\varphi$  und  $\psi$ , der als die Summe der Werte der genannten Grössen betrachtet werden kann, die jede Leitung allein an dem Punkt verursacht. Einen jeden der letztgenannten Teilwerte können wir, wenn der Abstand zu dem undurchlässigen Lager  $c$  gross ist, aus (30) und in anderem Falle aus (36) berechnen.

*Strömungsbild bei grossem Abstand zwischen der Bodenfläche und einem nach unten hin begrenzenden undurchlässigen Lager. Wir behan-*

deln zunächst den erstgenannten Fall und nehmen also an, dass der Wert von  $c$  gross ist. Von (30) ausgehend, erhalten wir dann für das Strömungsbild den Ausdruck

$$\omega = \left( i \frac{Q_0}{2} - \frac{Q_0}{2\pi} \ln \frac{z-a_0}{z+a_0} \right) + \left( i \frac{Q_1}{2} - \frac{Q_1}{2\pi} \ln \frac{z-a_1-ib_1}{z+a_1-ib_1} \right) + \dots \\ \dots + \left( i \frac{Q_n}{2} - \frac{Q_n}{2\pi} \ln \frac{z-a_n-ib_n}{z+a_n-ib_n} \right). \quad (40)$$

Als Ausdruck für die Potentiallinien gibt uns (32)

$$\varphi = - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{(x-a_0)^2 + y^2}{(x+a_0)^2 + y^2} - \frac{Q_1}{2\pi} \ln \frac{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2}{(x+a_1)^2 + (y-b_1)^2} - \dots \\ \dots - \frac{Q_n}{2\pi} \ln \frac{(x-a_n)^2 + (y-b_n)^2}{(x+a_n)^2 + (y-b_n)^2}, \quad (41)$$

und als Ausdruck für die Stromlinien erhalten wir aus (32)

$$\psi = \left[ \frac{Q_0}{2} - \frac{Q_0}{2\pi} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x-a_0} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x+a_0} \right) \right] + \\ + \left[ \frac{Q_1}{2} - \frac{Q_1}{2\pi} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y-b_1}{x-a_1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y-b_1}{x+a_1} \right) \right] + \dots \\ + \left[ \frac{Q_n}{2} - \frac{Q_n}{2\pi} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y-b_n}{x-a_n} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y-b_n}{x+a_n} \right) \right]. \quad (42)$$

Damit sind wir imstande, das Strömungsbild zu konstruieren.

Wenn ein Dränsystem in der Praxis ausgeführt wird, sind Dräntiefe und Dränabstand im allgemeinen konstant. Ebenso dürfte man davon ausgehen können, dass die verschiedenen Zweigleitungen des Systems per Längeneinheit der Leitung annähernd eine gleich grosse Wassermenge abführen. Unter solchen Verhältnissen können wir anstatt (40) die beträchtlich einfachere Formel

$$\omega = n i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \sum_{m=0}^{m=n} \ln \frac{z-a-mib}{z+a-mib} \quad (43)$$

schreiben oder, um den Stromlinienwert zwischen 0 und  $\pi/2$  variieren zu lassen,

$$\omega = n i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \sum_{m=0}^{m=n} \ln \frac{z-a-mib}{z+a-mib} - (n-1) i \frac{Q}{2} = \\ = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \sum_{m=0}^{m=n} \ln \frac{z-a-mib}{z+a-mib}. \quad (44)$$

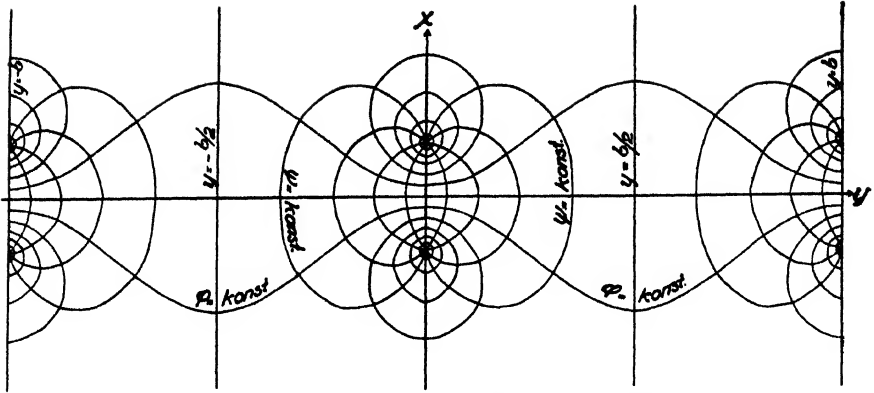


Fig. 14. Konforme Abbildung, die (45) entspricht.

Wir nehmen nun nicht allein an, dass die Bodenmasse grosse Ausdehnung habe, sondern ausserdem auch, dass die Anzahl der Leitungen gross sei. Wir erhalten dann, von (44) ausgehend,

$$\begin{aligned}\omega &= i\frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \left( \ln \frac{z-a}{z+a} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \ln \frac{z-a-mib}{z+a-mib} + \ln \frac{z-a+mib}{z+a+mib} \right) = \\ &= i\frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \left[ \ln \frac{z-a}{z+a} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \ln \frac{(z-a)^2 + (mb)^2}{(z+a)^2 + (mb)^2} \right]\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\omega &= i\frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{i\frac{\pi}{b}(z-a) \prod_{m=1}^{m=\infty} \left\{ 1 + \frac{\left[ \frac{\pi}{b}(z-a) \right]^2}{m\pi} \right\}}{i\frac{\pi}{b}(z+a) \prod_{m=1}^{m=\infty} \left\{ 1 + \frac{\left[ \frac{\pi}{b}(z+a) \right]^2}{m\pi} \right\}}\end{aligned}$$

ein Ausdruck, der nach dem Produktenentwicklungssatz für die Sinusfunktion (s. z. B. WHITTAKER & WATSON 1920) geschrieben werden kann

$$\omega = i\frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sin i\frac{\pi}{b}(z-a)}{\sin i\frac{\pi}{b}(z+a)} = i\frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sinh \frac{\pi}{b}(z-a)}{\sinh \frac{\pi}{b}(z+a)} \quad (45)$$

Wir trennen hier reelle und imaginäre Glieder voneinander. Führen wir die Bezeichnungen nach (37) ein, so können wir schreiben

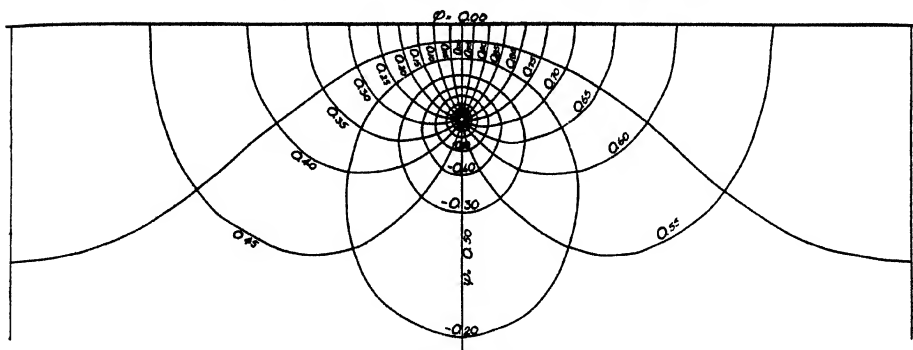


Fig. 15. Strömung in einer ganz wassergefüllten, nach ihrer Durchlässigkeit homogenen Bodenmasse mit grosser Ausdehnung nach der Seite und der Tiefe hin; die Strömung ist von mehreren Dränleitungen verursacht, die in untereinander gleichem Abstand und gleicher Tiefe verlegt sind und untereinander gleiche Wassermengen führen.

$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sinh(p + ir)}{\sinh(q + ir)},$$

was uns nach einer einfachen Rechnung entsprechend den Rechenregeln für komplexe Zahlen

$$\begin{aligned} \omega = & -\frac{Q}{2\pi} \cdot \ln \frac{\sinh^2 p \cdot \cos^2 r + \cosh^2 p \cdot \sin^2 r}{\sinh^2 q \cdot \cos^2 r + \cosh^2 q \cdot \sin^2 r} + \\ & + i \frac{Q}{2} + i \frac{Q}{2\pi} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\cosh p \cdot \sin r}{\sinh p \cdot \cos r} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\cosh q \cdot \sin r}{\sinh q \cdot \cos r} \right), \end{aligned}$$

gibt, woraus wir nach weiterer Umformung

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi} \cdot \ln \frac{\cosh \frac{2\pi}{b}(x-a) - \cos \frac{2\pi}{b}y}{\cosh \frac{2\pi}{b}(x+a) - \cos \frac{2\pi}{b}y} \quad (46)$$

als Potentialfunktion und

$$\psi = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{b}y}{\operatorname{th} \frac{\pi}{b}(x-a)} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{b}y}{\operatorname{th} \frac{\pi}{b}(x+a)} \right] \quad (47)$$

als Stromlinienfunktion erhalten. Zeichnen wir das zu (46) und (47) gehörige Bild, so erhalten wir Fig. 14. Wie man sieht, passt die untere Hälfte des Bildes auf unser aktuelles Problem ein, unter der Voraussetzung, dass der Leitungsdurchmesser im Verhältnis zur Dräntiefe und dem Dränabstand klein ist. In Fig. 15 ist ein Strömungsbild



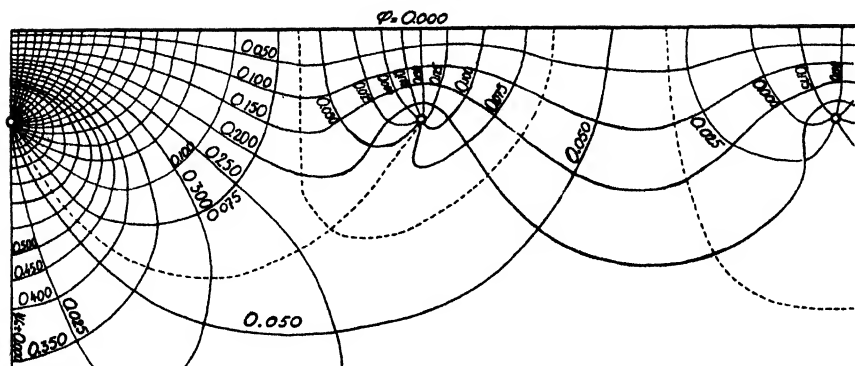


Fig. 16. Strömung in einer ganz wassergefüllten, nach ihrer Durchlässigkeit homogenen Bodenmasse mit grosser Ausdehnung nach der Seite und der Tiefe hin; die Strömung ist von mehreren Dränleitungen verursacht, die in untereinander gleichem Abstand und gleicher Tiefe verlegt sind und von denen eine ca. dreimal so grosse Wassermenge führt als die übrigen.

unter der Annahme konstruiert worden, dass Leitungshalbmesser, Dräntiefe ( $a$ ) und Dränabstand ( $b$ ) sich zueinander wie die Zahlen 0,05 : 1,00 : 10,00 verhalten.

Zuletzt nehmen wir an, dass in einem System von vielen Leitungen, die in derselben Tiefe und in demselben Abstand gelegt sind, eine Leitung eine Wasserführung habe, die mit der Menge  $Q_1$  in der Zeiteinheit von der untereinander gleichen Wasserführung der übrigen Leitungen,  $Q$ , abweicht. Das jetzt sich ergebende Strömungsbild kann, wie man an der Hand der Darlegung bis (45) unmittelbar einsieht, als Abbildung der Funktion

$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sinh \frac{\pi}{b} (z-a)}{\sinh \frac{\pi}{b} (z+a)} \pm \left( i \frac{Q_1}{2} - \frac{Q_1}{2\pi} \ln \frac{z-a}{z+a} \right) \quad (48)$$

gezeichnet werden, wenn der Koordinatenmittelpunkt in die Bodenfläche gerade oberhalb der betreffenden Leitung gelegt wird. Das Pluszeichen gilt, wenn die Leitung grössere Kapazität hat als die Nachbarn, sonst das Minuszeichen. (48) kann leicht in derselben Weise wie der vorhergehende Fall entwickelt werden, worauf das Bild sich zeichnen lässt. In Fig. 16 ist eine Konstruktion des Strömungsbildes vorgenommen worden, wobei vorausgesetzt wurde, dass das Verhältnis zwischen Röhrendurchmesser, Dräntiefe und Dränabstand das gleiche sei wie in Fig. 15, sowie dass eine der Leitungen eine dreimal so grosse Kapazität habe als ihre Nachbarn.

Aus der Konstruktion ergibt sich die interessante Tatsache, dass die stärkere Leitung einen Teil der Bodenfläche jenseits ihrer nächsten Nachbarn entwässert.

*Strömungsbild bei geringerem Abstand zwischen der Bodenfläche und einem nach unten hin begrenzenden undurchlässigen Lager.* Wir behandeln hierauf den zweiten Fall und nehmen an, dass der Abstand  $c$  zu dem undurchlässigen Lager, von der Bodenfläche gerechnet, so klein ist, dass das genannte Lager eine merkbare Einwirkung auf das Strömungsbild hat. Von (36) ausgehend, erhalten wir nun statt (40)

$$\begin{aligned} \omega = & \left[ i \frac{Q_0}{2} - \frac{Q_0}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z-a)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z+a)} \right] + \left[ i \frac{Q_1}{2} - \frac{Q_1}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z-a_1-ib_1)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z+a_1-ib_1)} \right] + \dots \\ & \dots + \left[ i \frac{Q_n}{2} - \frac{Q_n}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z-a_n-ib_n)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z+a_n-ib_n)} \right] \end{aligned} \quad (49)$$

als Ausdruck für das Strömungsbild, wenn Dränleitungen mit verschiedener Tiefe und verschiedenem Abstand eingelegt sind. Als Ausdrücke für Potentiallinien und Stromlinien erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi = & - \frac{Q_0}{2\pi} \ln \frac{\left[ \cosh \frac{\pi}{2c} y - \cos \frac{\pi}{2c} (x-a_0) \right]}{\left[ \cosh \frac{\pi}{2c} y + \cos \frac{\pi}{2c} (x-a_0) \right]} \frac{\left[ \cosh \frac{\pi}{2c} y + \cos \frac{\pi}{2c} (x+a_0) \right]}{\left[ \cosh \frac{\pi}{2c} y - \cos \frac{\pi}{2c} (x+a_0) \right]} - \\ & - \frac{Q_1}{2\pi} \ln \frac{\left[ \cosh \frac{\pi}{2c} (y-b_1) - \cos \frac{\pi}{2c} (x-a_1) \right]}{\left[ \cosh \frac{\pi}{2c} (y-b_1) + \cos \frac{\pi}{2c} (x-a_1) \right]} \frac{\left[ \cosh \frac{\pi}{2c} (y-b_1) + \cos \frac{\pi}{2c} (x+a_1) \right]}{\left[ \cosh \frac{\pi}{2c} (y-b_1) - \cos \frac{\pi}{2c} (x+a_1) \right]} - \dots \\ & - \frac{Q_n}{2\pi} \ln \frac{\left[ \cosh \frac{\pi}{2c} (y-b_n) - \cos \frac{\pi}{2c} (x-a_n) \right]}{\left[ \cosh \frac{\pi}{2c} (y-b_n) + \cos \frac{\pi}{2c} (x-a_n) \right]} \frac{\left[ \cosh \frac{\pi}{2c} (y-b_n) + \cos \frac{\pi}{2c} (x+a_n) \right]}{\left[ \cosh \frac{\pi}{2c} (y-b_n) - \cos \frac{\pi}{2c} (x+a_n) \right]} \quad (50) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
 \psi = & \left[ \frac{Q_0}{2} - \frac{Q_0}{2\pi} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sinh \frac{\pi}{2c} y}{\sin \frac{\pi}{2c} (x-a_0)} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sinh \frac{\pi}{2c} y}{\sin \frac{\pi}{2c} (x+a_0)} \right) \right] + \\
 & + \left[ \frac{Q_1}{2} - \frac{Q_1}{2\pi} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sinh \frac{\pi}{2c} (y-b_1)}{\sin \frac{\pi}{2c} (x-a_1)} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sinh \frac{\pi}{2c} (y-b_1)}{\sin \frac{\pi}{2c} (x+a_1)} \right) \right] + \dots \\
 & + \left[ \frac{Q_n}{2} - \frac{Q_n}{2\pi} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sinh \frac{\pi}{2c} (y-b_n)}{\sin \frac{\pi}{2c} (x-a_n)} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sinh \frac{\pi}{2c} (y-b_n)}{\sin \frac{\pi}{2c} (x+a_n)} \right) \right] \quad (51)
 \end{aligned}$$

und wir können mit Hilfe dieser Ausdrücke das Strömungsbild zeichnen.

Setzen wir nun wie auf S. 43 voraus, dass die Leitungen in derselben Tiefe und mit demselben gegenseitigen Abstand gelegt sind, und nehmen wir an, dass sie per Längeneinheit der Leitungsstrecke dieselbe Wassermenge ableiten, so können wir statt (49)

$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \sum_{m=0}^{m=n} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z-a-mib)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z+a-mib)} \quad (52)$$

schreiben oder

$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \prod_{m=0}^{m=n} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z-a-mib)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z+a-mib)} \quad (53)$$

Ist, wie auf S. 44 angenommen wurde, die Anzahl der Leitungen gross, so geht (53) in

$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z-a)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z+a)} \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z-a-mib)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z+a-mib)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z-a+mib)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z+a+mib)} \quad (54)$$

über oder nach der Darlegung auf S. 39

$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\prod_{m=-\infty}^{m=\infty} \prod_{m'=-\infty}^{m'=\infty} \frac{i(z-a) + mb + i 2 m' c}{i(z-a) + mb + i 2 (2m' + 1)c}}{\prod_{m=-\infty}^{m=\infty} \prod_{m'=-\infty}^{m'=\infty} \frac{i(z+a) + mb + i 4 m' c}{i(z+a) + mb + i 2 (2m' + 1)c}} \quad (55)$$

Für die nähere Behandlung dieses unendlichen Doppelproduktes machen wir von den Sätzen Gebrauch, die EISENSTEIN (1847) für die Entwicklung von Jacobis elliptischen Funktionen als Quotienten unendlicher Doppelprodukte aufgestellt hat. Wie Eisenstein gezeigt hat, gilt u. a. der Satz, dass die elliptische Funktion  $\operatorname{sn} a\xi$  in das unendliche Doppelprodukt

$$\prod_{m=-\infty}^{m=\infty} \prod_{m'=-\infty}^{m'=\infty} \frac{[\alpha + 2mK + i 2m'K'] [2mK + i(2m' + 1)K']}{[2mK + i 2m'K'] [\alpha + 2mK + i(2m' + 1)K']} \quad (56)$$

entwickelt werden kann, wobei  $\xi$  den Modul der Funktion und  $K$  und  $K'$  ihre reelle bzw. imaginäre Periode bezeichnen. Wir können folglich

$$\frac{\operatorname{sn} a\xi}{\operatorname{sn} \beta\xi} = \frac{\prod_{m=-\infty}^{m=\infty} \prod_{m'=-\infty}^{m'=\infty} \frac{\alpha + 2mK + i 2m'K'}{\alpha + 2mK + i(2m' + 1)K'}}{\prod_{m=-\infty}^{m=\infty} \prod_{m'=-\infty}^{m'=\infty} \frac{\beta + 2mK + i 2m'K'}{\beta + 2mK + i(2m' + 1)K'}}$$

schreiben. Daraus ergibt sich sofort, dass, wenn wir die Relation zwischen den Perioden  $K$  und  $K'$  so wählen, dass

$$\frac{K}{K'} = \frac{b}{4c}, \quad (57)$$

wir den Ausdruck (55) schreiben können

$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{sn} i \frac{2K}{b} (z-a)\xi}{\operatorname{sn} i \frac{2K}{b} (z+a)\xi} = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{sn} i \frac{K'}{2c} (z-a)\xi}{\operatorname{sn} i \frac{K'}{2c} (z+a)\xi}, \quad (58)$$

was also die Funktion darstellt, deren Abbildung unserem gesuchten Strombild entspricht.

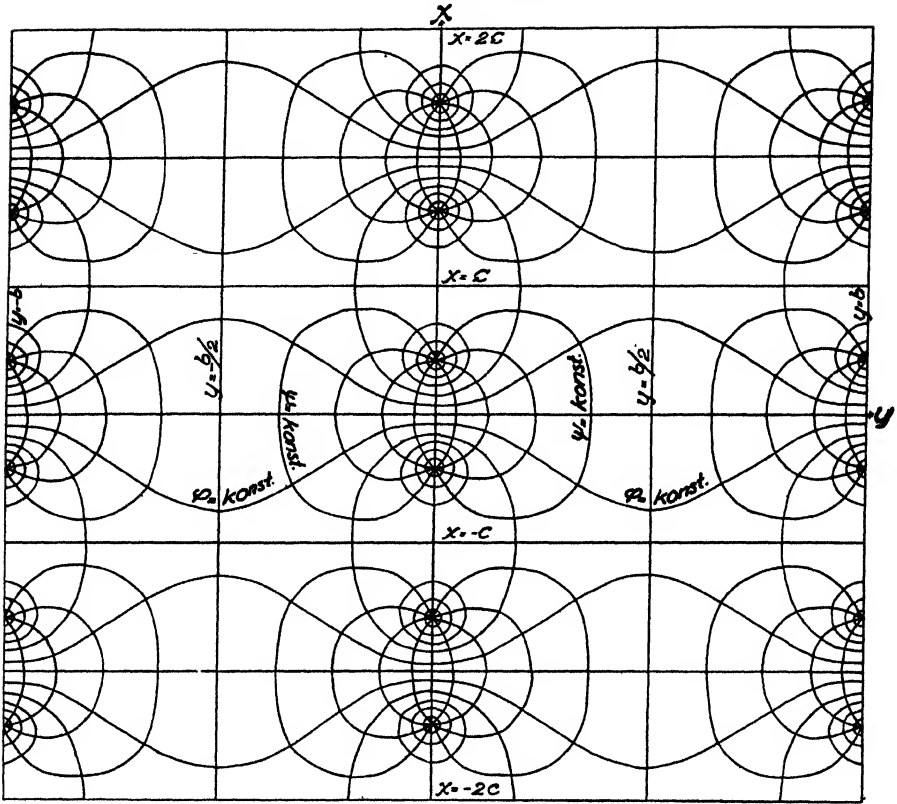


Fig. 17. Konforme Abbildung, die (58) entspricht.

Um die reellen und imaginären Glieder zu trennen, schreiben wir

$$\frac{2K}{b}(x-a) = \frac{K'}{2c}(x-a) = p; \quad \frac{2K}{b}(x+a) = \frac{K'}{2c}(x+a) = q;$$

$$\frac{2K}{b}y = \frac{K'}{2c}y = r \quad (59)$$

und erhalten hierauf mit Hilfe des Additionstheorems für Jacobis elliptische Funktionen (ENNEPER 1880)

$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \cdot \ln \frac{[\operatorname{sn} i p_{\xi} \operatorname{cn} r_{\xi} \operatorname{dn} r_{\xi} - \operatorname{cn} i p_{\xi} \cdot \operatorname{dn} i p_{\xi} \cdot \operatorname{sn} r_{\xi}][1 - \xi^2 \cdot \operatorname{sn}^2 i q_{\xi} \cdot \operatorname{sn}^2 r_{\xi}]}{[1 - \xi^2 \cdot \operatorname{sn}^2 i p_{\xi} \cdot \operatorname{sn}^2 r_{\xi}][\operatorname{sn} i q_{\xi} \cdot \operatorname{cn} r_{\xi} \cdot \operatorname{dn} r_{\xi} - \operatorname{cn} i q_{\xi} \cdot \operatorname{dn} i q_{\xi} \cdot \operatorname{sn} r_{\xi}]} \quad (60)$$

Nach den Rechnungsregeln für die genannten Funktionen ist nun

$$\operatorname{sn} i \alpha_{\xi} = i \frac{\operatorname{sn} \alpha_{\xi'}}{\operatorname{cn} \alpha_{\xi'}}; \quad \operatorname{cn} i \alpha_{\xi} = \frac{1}{\operatorname{cn} \alpha_{\xi'}} \quad \text{und} \quad \operatorname{dn} i \alpha_{\xi} = \frac{\operatorname{dn} \alpha_{\xi'}}{\operatorname{cn} \alpha_{\xi'}};$$

wenn  $\xi'$  den sogenannten Komplementärmodul ( $\xi'^2 = 1 - \xi^2$ ) bezeichnet. Wir können deshalb den Ausdruck (60)

$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\left[ i \frac{\operatorname{sn} p_{z'}}{\operatorname{cn} p_{z'}} \operatorname{cn} r_z \cdot \operatorname{dn} r_z + \frac{\operatorname{dn} p_{z'}}{\operatorname{cn}^2 p_{z'}} \cdot \operatorname{sn} r_z \right] \left[ 1 + \xi^2 \frac{\operatorname{sn}^2 q_{z'}}{\operatorname{cn}^2 q_{z'}} \cdot \operatorname{sn} r_z \right]}{\left[ 1 + \xi^2 \frac{\operatorname{sn}^2 p_{z'}}{\operatorname{cn}^2 p_{z'}} \cdot \operatorname{sn} r_z \right] \left[ i \frac{\operatorname{sn} q_{z'}}{\operatorname{cn} q_{z'}} \cdot \operatorname{cn} r_z \cdot \operatorname{dn} r_z + \frac{\operatorname{dn} q_{z'}}{\operatorname{cn}^2 p_{z'}} \cdot \operatorname{sn} r_z \right]} \quad (61)$$

schreiben. Wir erhalten

$$\varphi = - \frac{Q}{4\pi} \cdot \ln \frac{\left[ \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_{z'} \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_{z'} \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} y_z \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} y_z + \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_{z'} \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} y_z \right]}{\left[ \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_{z'} + \xi^2 \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_{z'} \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} y_z \right]^2} \cdot \frac{\left[ \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_{z'} + \xi^2 \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_{z'} \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} y_z \right]^2}{\left[ \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_{z'} \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_{z'} \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} y_z \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} y_z + \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_{z'} \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} y_z \right]} \quad (62)$$

als Potentialfunktion und

$$\psi = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arc tg} \frac{\operatorname{dn} \frac{2K}{b} (x-a)_{z'}}{\operatorname{sn} \frac{2K}{b} (x-a)_{z'} \cdot \operatorname{cn} \frac{2K}{b} (x-a)_{z'}} \cdot \frac{\operatorname{sn} \frac{2K}{b} y_z}{\operatorname{cn} \frac{2K}{b} y_z \cdot \operatorname{dn} \frac{2K}{b} y_z} - \operatorname{arc tg} \frac{\operatorname{dn} \frac{2K}{b} (x+a)_{z'}}{\operatorname{sn} \frac{2K}{b} (x+a)_{z'} \cdot \operatorname{cn} \frac{2K}{b} (x+a)_{z'}} \cdot \frac{\operatorname{sn} \frac{2K}{b} y_z}{\operatorname{cn} \frac{2K}{b} y_z \cdot \operatorname{dn} \frac{2K}{b} y_z} \quad (63)$$

als Stromlinienfunktion.

Zeichnen wir in eine  $z$ -Ebene das zu (62) und (63) gehörige allgemeine Bild ein, so erhalten wir Fig. 17. Wie man sieht, passt eine Reihe waagerechte »Halbmaschen« auf unser aktuelles Problem, unter der Voraussetzung, dass der Leitungsdurchmesser im Verhältnis zur Dräntiefe und dem Dränabstand klein ist. In Fig. 18 ist ein Strömungsbild unter der Annahme konstruiert worden, dass Leitungshalbmesser, Dräntiefe, Dränabstand und Tiefe des undurchlässigen Lagers unter der Bodenfläche sich zu einander wie 0,05:1,00:10,00:2,75 verhalten.

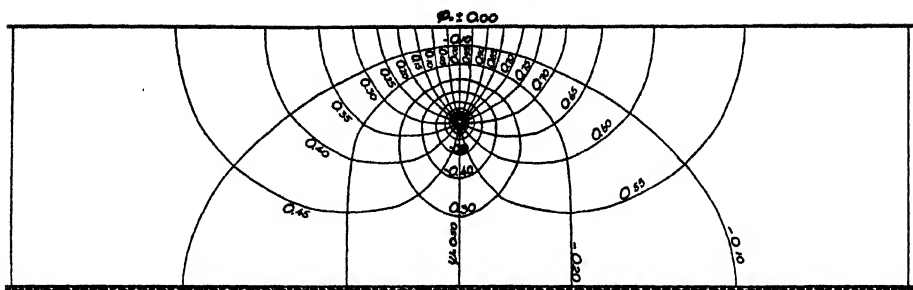


Fig. 18. Strömung in einer ganz wassergefüllten, nach ihrer Durchlässigkeit homogenen Bodenmasse mit grosser Ausdehnung nach der Seite; die Strömung ist von mehreren Dränleitungen verursacht, die in untereinander gleichem Abstand und gleicher Tiefe verlegt sind und untereinander gleiche Wassermengen führen.

Wir nehmen schliesslich an, dass in einem System mit einer grossen Anzahl von Leitungen, wie es oben geschildert wurde, eine Leitung eine Wasserführung hat, die mit ihrer Menge  $Q_1$  per Zeiteinheit von der Wasserführung der übrigen Leitungen  $Q$  abweicht. Das jetzt sich ergebende Strömungsbild können wir, wie man an der Hand der Darlegung bis (58) unmittelbar einsieht, wiedergeben wie folgt

$$\omega = \left[ i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{sn} i \frac{2K}{b} (z-a)}{\operatorname{sn} i \frac{2K}{b} (z+a)} \right] \pm \left[ i \frac{Q_1}{2} - \frac{Q_1}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z-a)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4c} (z+a)} \right], \quad (64)$$

wenn der Koordinatenmittelpunkt in die Bodenfläche gerade über der betreffenden Leitung gelegt wird. Das Pluszeichen gilt wenn die Leitung grössere Kapazität hat als die Nachbarn, sonst das Minuszeichen (vgl. (48) und die dazu gehörige Fig. 16).

*Strömung, wenn auch eine andere, nicht von dem Dränsystem bedingte Wasserbewegung (Primärströmung) vorkommt.*

Wir erweitern nun unsere Voraussetzungen insofern, als wir annehmen, die Sachlage sei so, dass auf einem Gebiete eine merkbare Wasserbewegung des Grundwassers auch dann vorkomme, wenn der Boden nicht gedränt ist. Diese Bewegung, die wir in dem Folgenden die *Primärströmung* nennen, kann von verschiedener Art sein und darnach ergeben sich auch für die Dränung des Bodens verschiedene Strömungsbilder. Wir wollen in dem Folgenden zwei an die Praxis sich nahe anschliessende Spezialfälle behandeln.

Die Primärströmung ist eine vertikale  
Parallelströmung.

Wir setzen zunächst voraus, dass das Wasser in einem ungedrängten Boden mit grosser Ausdehnung nach der Seite und nach der Tiefe hin

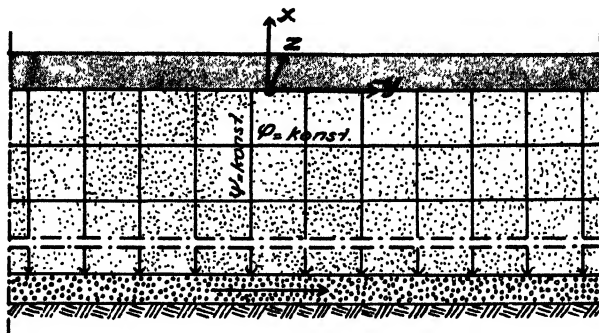


Fig. 19. Vertikale Parallelströmung.

und mit waagerechter Fläche sich in sinkendem Zustande befinde, und dass die Geschwindigkeit der dadurch entstehenden vertikal gerichteten Strömung an verschiedenen Punkten der Bodenmasse gleich gross sei. Eine solche Strömung kann aus verschiedenen Anlässen entstehen, z. B. auf die in Fig. 19 angedeutete Weise, d. h. dadurch, dass die Bodenmasse in grösserer Tiefe von einem horizontalen Kieslager mit grosser Durchlässigkeit unterlagert ist, welches letztere das Ableiten des Wassers zur Folge hat.

Legen wir nun ein Koordinatensystem so, wie Fig. 19 zeigt, dessen Mittelpunkt in der Bodenfläche liegt, so entspricht, wie unmittelbar einzusehen ist, dem in der  $xy$ -Ebene entstehenden Strömungsbild eine Abbildung der Funktion

$$\omega = \varphi + i\psi = \frac{Q_1}{b}(x + iy) = \frac{Q_1}{b}z \quad (65)$$

wobei  $Q_1/b$  die durch eine waagerechte Fläche mit dem Flächeninhalt 1 dahinströmende Wassermenge ist.

Wir nehmen nun an, dass in die Bodenmasse eine Anzahl von Dränleitungen, mit einer Tiefe  $a$  unter der Bodenfläche und mit einem gegenseitigen Abstand  $b$ , gelegt werden. Jede Leitung führe, so nehmen wir an, in der Zeiteinheit die Wassermenge  $Q$  ab. Gäbe es keine Primärströmung, so würde dem entstehenden Strömungsbild eine Abbildung von (45) entsprechen. Da jedoch eine solche vorliegt, so wird dem  $\varphi$ - und  $\psi$ -Werte an jedem Punkt der Bodenmasse die Summe der



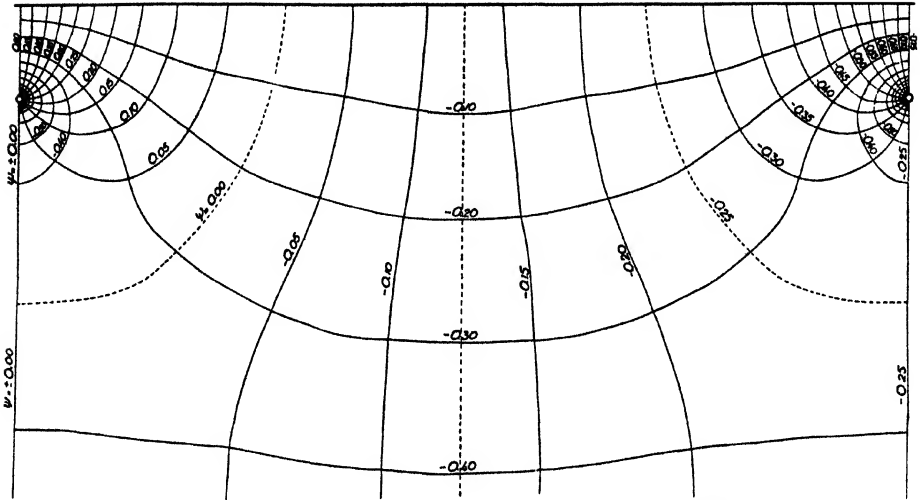


Fig. 20. Strömung in einer ganz wassergefüllten, nach ihrer Durchlässigkeit homogenen Bodenmasse mit grosser Ausdehnung nach der Seite und der Tiefe hin; die Strömung ist teils von einer vertikalen »Primärströmung« verursacht, teils von mehreren Dränleitungen, die in untereinander gleichem Abstand und gleicher Tiefe verlegt sind und untereinander gleiche Wassermengen führen.

$\varphi$ - und  $\psi$ -Werte entsprechen, die die Strömung zu den Dränleitungen und die Primärströmung erzeugen. Aus (45) und (65) erhalten wir dafür als Abbildungsfunktion

$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sinh \frac{\pi}{b}(z-a)}{\sinh \frac{\pi}{b}(z+a)} + \frac{Q_1}{b} z \quad (66)$$

oder nach Trennung der reellen und imaginären Glieder (vgl. die Darlegung bis zu (46) und (47))

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -\frac{Q}{4\pi} \ln \frac{\cosh \frac{2\pi}{b}(x-a) - \cos \frac{2\pi}{b}y}{\cosh \frac{2\pi}{b}(x+a) - \cos \frac{2\pi}{b}y} + \frac{Q_1}{b}x \\ \psi &= \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{b}y}{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{b}(x-a)} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{b}y}{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{b}(x+a)} \right] + \frac{Q_1}{b}y \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

als Potential- und Stromlinienfunktion.

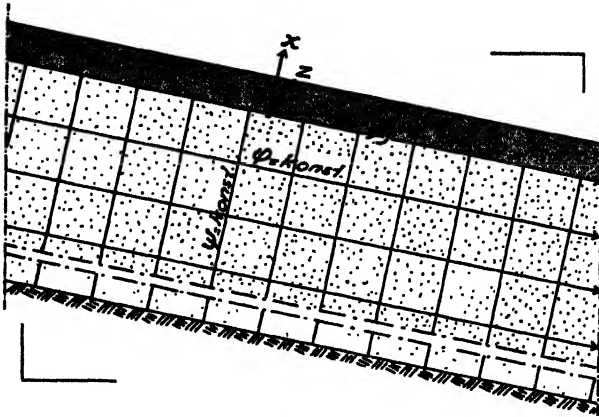


Fig. 21. Parallelströmung in einem Boden mit geneigter Fläche.

Mit Hilfe von (67) kann das entstehende Strömungsbild konstruiert werden. In Fig. 20 ist eine solche Konstruktion durchgeführt, wobei angenommen wurde, dass Leitungsradius, Dräntiefe und Dränabstand sich zueinander wie die Zahlen 0,05:1,00:10,00 verhalten. Weiter wurde vorausgesetzt, dass jede Leitung eine 4mal so grosse Wassermenge ableite als gleichzeitig von dem Entwässerungsgebiete der Leitung hinunter sinkt.

Aus dem Bilde ergibt sich die Tatsache, dass der Zufluss zu den Leitungen von den Teilen der Bodenfläche erfolgt, die ihnen am nächsten gelegen sind, während der Zufluss zu tieferen Bodenlagern von den Teilen der Bodenfläche geschieht, die von den Leitungen am entferntesten liegen. Zwischen den zwei Strömungen bildet sich eine ellipsenähnliche Trennungsfläche aus, die in der Figur durch eine gestrichelte Linie angedeutet ist.

Die Primärströmung ist eine mit der Bodenfläche parallele Strömung.

In einem zweiten Fall setzen wir voraus, dass das Wasser in einem ungedrännten Boden mit ebener Fläche und grosser Ausdehnung nach der Tiefe und der Seite hin sich in einer parallel zur Bodenfläche erfolgenden Bewegung befindet. Diese Voraussetzung kann u. a. unter folgenden Umständen gemacht werden.

Wir geben die früher gemachte Voraussetzung auf, dass die Bodenfläche horizontal sei, und nehmen statt dessen an, dass sie eine gewisse Neigung habe, so dass sie mit der Horizontalebene den Winkel  $\alpha$  bilde (vgl. Fig. 21). Nach unten hin ist der wasserführende Boden von

einem undurchlässigen Lager begrenzt, das zu der Bodenfläche parallel verläuft. Wir nehmen weiter an, dass der Boden infolge von Niederschlägen ganz wassergefüllt bleibt und dass der Überschuss an Niederschlägen, d. h. die Niederschläge, die nicht in den Boden eindringen können, frei auf der Bodenfläche ablaufen kann. Im Boden entsteht nun eine zur Bodenfläche parallel laufende Strömung. Legen wir nun ein Koordinatensystem, das seinen Mittelpunkt in der Bodenfläche hat und dessen  $y$ -Achse parallel mit dieser geht wie Fig. 21 zeigt, so kann das Strömungsbild in der  $xy$ -Ebene durch eine Abbildung der Funktion

$$\omega = \varphi + i\psi = Q_1/c (ix + y) \quad (68)$$

gezeichnet werden, wobei  $Q_1/c$  die durch eine zu der  $xz$ -Ebene parallele Fläche vom Flächeninhalt 1 strömende Wassermenge ist.  $Q_1/c$  kann, wie leicht einzusehen ist, auch durch  $k \cdot tg \alpha$  ausgedrückt werden.

Wir nehmen nun an, dass der Boden gedränt wird. Das dabei sich ergebende Strömungsbild erhalten wir nun, indem wir nach der gleichen Überlegung, die uns zu (66) führte, das Bild der Primärströmung und das Bild, das die Dränung veranlasst haben würde, wenn eine Primärströmung nicht vorgekommen wäre, zusammenlegen. Wir nehmen z. B. an, dass der Abstand von der Bodenfläche zu dem undurchlässigen Lager gross ist, und dass eine Anzahl von Leitungen in den Boden in der Tiefe  $a$  und mit dem gegenseitigen Abstand  $b$  gelegt wird. Die von uns gesuchte Abbildungsfunktion erhalten wir, wenn wir (45) und (68) addieren, wobei sich

$$\omega = i\frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sinh \frac{\pi}{b}(z-a)}{\sinh \frac{\pi}{b}(z+a)} + \frac{Q_1}{c}(ix+y) \quad (69)$$

ergibt oder nach Trennung der reellen und imaginären Teile

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -\frac{Q}{4\pi} \ln \frac{\cosh \frac{2\pi}{b}(x-a) - \cos \frac{2\pi}{b}y}{\cosh \frac{2\pi}{b}(x+a) - \cos \frac{2\pi}{b}y} + \frac{Q_1}{c}y \\ \psi &= \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{b}y}{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{b}(x-a)} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{b}y}{\operatorname{tgh} \frac{\pi}{b}(x+a)} \right] + \frac{Q_1}{c}x \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

als Potential- bzw. Stromlinienfunktion.

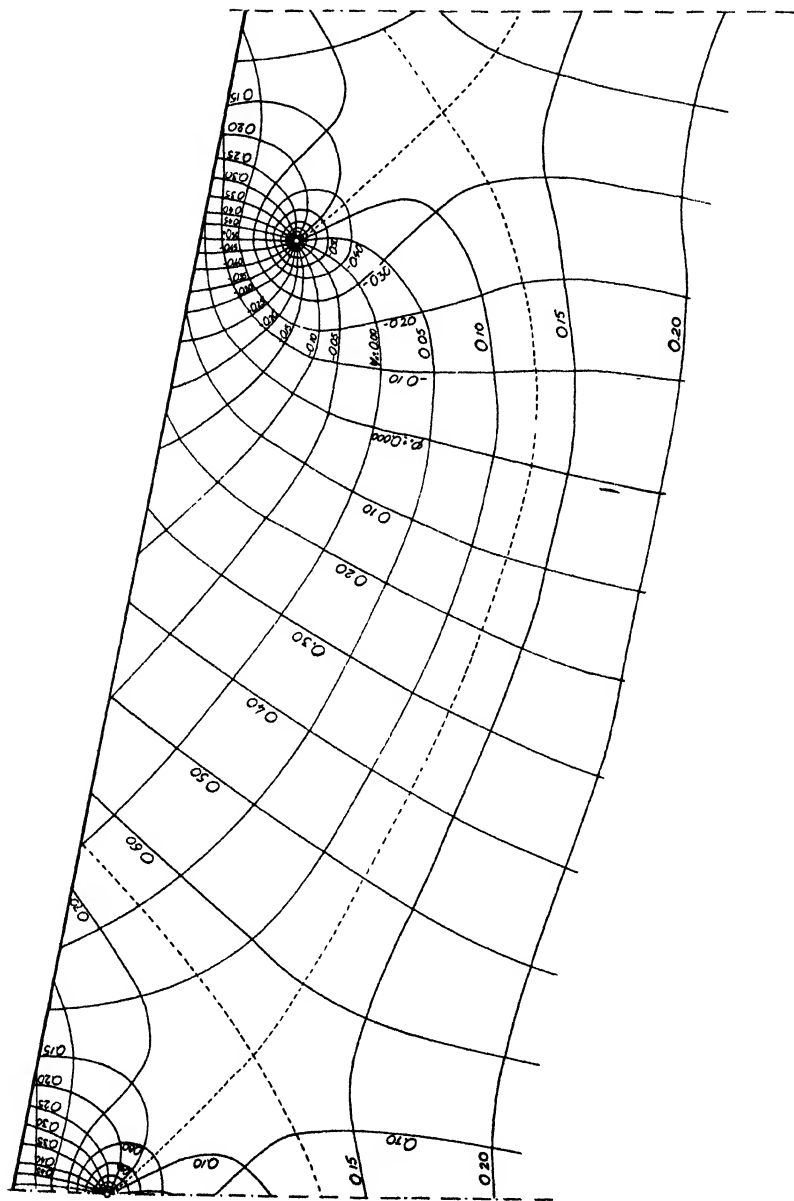


Fig. 22. Strömung in einer ganz wassergefüllten, nach ihrer Durchlässigkeit homogenen Bodenmasse mit grosser Ausdehnung nach der Seite und der Tiefe hin und mit geneigter Fläche, in der mehrere Dränleitungen verlegt sind, die untereinander gleiche Wassermengen führen und in untereinander gleicher Tiefe unter der Bodenfläche und in untereinander gleichem Abstand liegen.

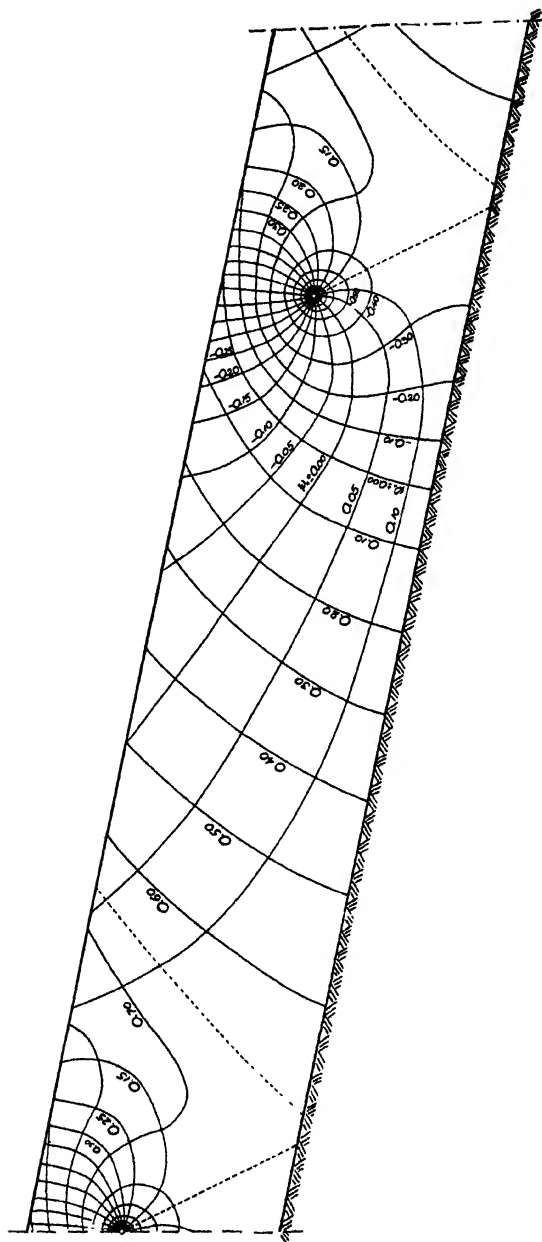


Fig. 23. Strömung in einer ganz wassergefüllten, nach ihrer Durchlässigkeit homogenen Bodenmasse mit grosser Ausdehnung nach der Seite hin und mit geneigter Fläche, in der mehrere Dränleitungen eingelegt sind, die untereinander gleiche Wassermengen führen und in untereinander gleicher Tiefe unter der Bodenfläche und in gleichem Abstand von einander liegen.

Auf Grundlage von (69) ist in Fig. 22 ein Strömungsbild konstruiert worden, wobei angenommen wurde, dass Leitungsradius, Dräntiefe und Dränabstand sich zueinander wie die Zahlen 0,05:1,00:10,00 verhalten, und weiter, dass der Boden die Neigung 2:10 habe. Das entstandene Bild ist, wie ersichtlich, unter anderem dadurch charakterisiert, dass das Wasser in gewisser Tiefe unter den Dränleitungen nicht diesen zustrebt, sondern statt dessen *in einem zur Bodenfläche im ganzen parallelen Strom dahingeht*.

Konstruktionen mit anderen Voraussetzungen als der oben gemachten können leicht vorgenommen werden. Ist z. B. der Abstand von der Bodenfläche zu dem undurchlässigen Lager kleiner, so geht man von dem Ausdrucke (58) aus, der zu (68) addiert wird usw. Eine solche Konstruktion ist in Fig. 23 unter der Annahme gemacht worden, dass Leitungsdurchmesser, Dräntiefe, Dränabstand und Tiefe des undurchlässigen Lagers unter der Bodenfläche sich zueinander verhalten wie 0,05:1,00:10,00:2,75, sowie unter der Voraussetzung, dass der Boden die Neigung 2:10 habe.

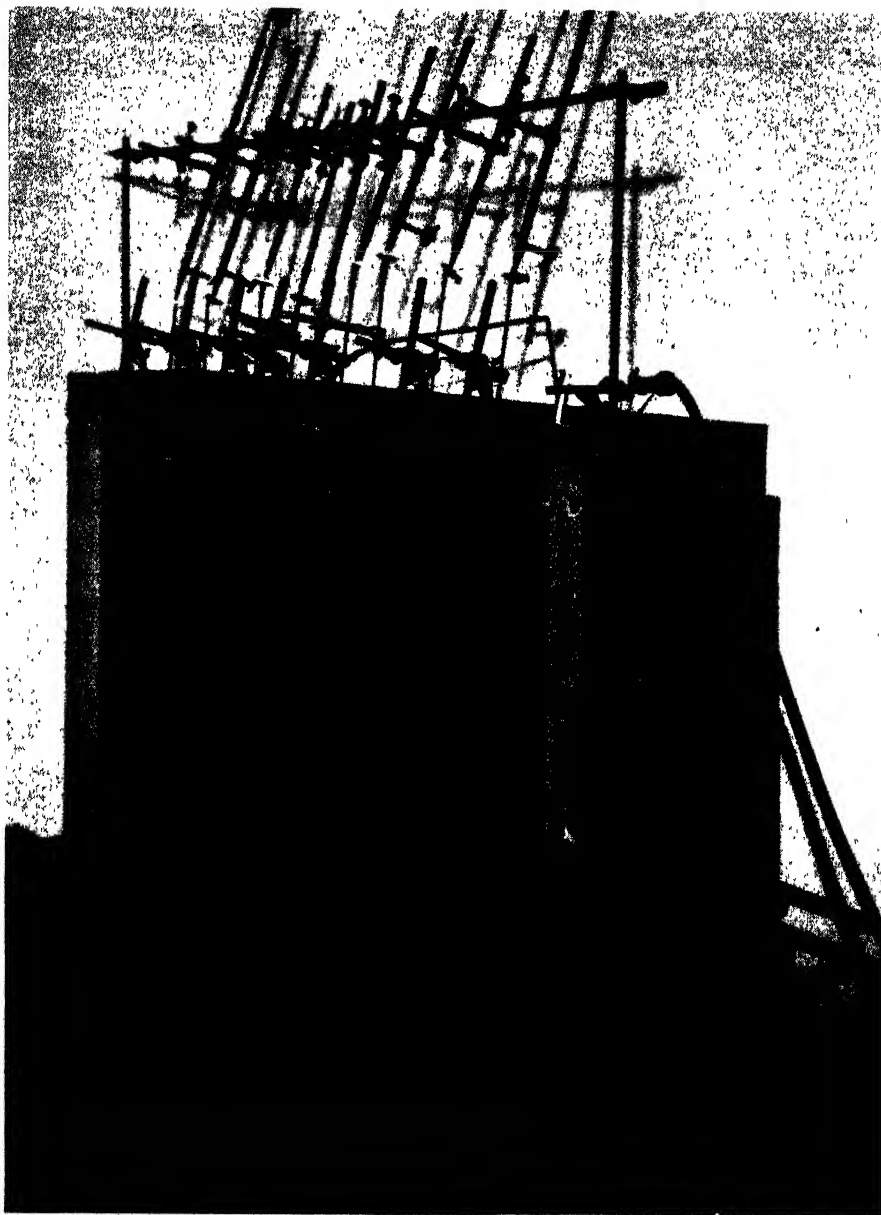
## b. Modellversuche.

Die oben für verschiedene Sachlagen konstruierten Strömungsbilder sind auf rein theoretischem Wege deduziert worden, wobei unser Ausgangspunkt Darcys Satz und die Kontinuitätsgleichung gewesen sind. Zur Kontrolle der erhaltenen Ergebnisse schien es dem Verfasser angebracht, gewisse empirische Laboratoriumsuntersuchungen in Form von Modellversuchen auszuführen.

### *Apparatur.*

Für die Modellversuche wurden zwei verschiedene Ausrüstungen angewendet, die im Folgenden Modell 1 und Modell 2 genannt werden.

Modell 1 (Fig. 24) bestand aus einem kastenförmigen Behältnis, das nach seinen inneren Massen 150 cm lang, 22 cm breit und 100 cm hoch war. Sein Boden und seine Schmalseiten bestanden aus einer 7,5 cm dicken Planke, seine Rückseite aus einer 5 cm dicken Planke und seine Vorderseite aus 15 mm dickem maschinengepresstem Glase, das vollständigen Einblick ermöglichte. Zusammengefügt war es mit Eisenbolzen und mit Teerwerg und Mennichkitt gedichtet. Gegen den Wasserdruck wurde weiter das Behältnis auswendig oben mit Winkel-eisen und unten mit eisernen U-Balken verstärkt. Oben auf dem Be-



*Fig. 24. Photographie von Modell 1.*

hältnis wurde ein Gestell aus Rundeisen festgemacht, in dem eine Anzahl von Burettten, die Färbemittel enthielten, in beliebiger Weise angebracht werden konnte.

Zur Apparatur gehörte weiter eine Reihe von Modellen für Dränleitungen, die ebenso lang waren wie das genannte Behältnis breit. Diese Modelle (Fig. 25 a), die verschiedene Durchmesser hatten, waren aus Messingtuch (sogenanntem Tressentuch hergestellt, das zu Röhren zusammengebogen und so zusammengelötet wurde, dass sich eine möglichst schmale Lötfrage ergab. Die Enden der Röhren waren mit dichten Deckeln von Messingblech versehen. Jede Röhre war weiter mit einem festgelöteten Abflussrohr aus Messing versehen, das winkelmäßig zur Achse der Röhre und ca. 2 cm von dem einen Ende derselben angebracht war.

Vor den Untersuchungen wurde das Behältnis mit unten näher beschriebenen Bodenmaterial bis zu einer bestimmten Höhe gefüllt. In die Erde wurden eine oder mehrere der oben genannten Modelldränleitungen so eingelegt, dass ihre Achsen normal auf die Glaswand des Behältnisses standen. Darauf wurde Wasser in das Behältnis eingelassen, so dass die ganze Bodenmasse mit Wasser gefüllt wurde und die Wasserfläche bis zur Bodenfläche oder etwas über dieselbe reichte. Bei den Versuchen wurde dann das Wasser durch die Ablauföffnungen der Leitungen aus der Erde abgeleitet, während von oben gleichzeitig dem Behältnis Wasser in so grosser Menge zugeführt wurde, dass die Wasserfläche sich in demselben auf konstantem Niveau hielt. Die dadurch in der Bodenmasse entstandene Strömung wurde in der Weise studiert, dass man an verschiedenen an der Glaswand gelegenen Punkten der Bodenfläche von der Spitze einer Burette ein Färbemittel langsam einströmen liess. Das Färbemittel ging mit dem Wasser auf seinem Wege durch die Erdmasse mit, wodurch sich ein durch das Glas wahrnehmbares Farbenband bildete. Das Band gab, wie unmittelbar einzusehen ist, die Lage der Stromlinie an, die den Punkt passierte, in dem sich die Spitze der Burette befand. Indem nun gleichzeitig von verschiedenen Burettten aus an verschiedenen Stellen Färbemittel in die Bodenmasse eingeführt wurde, konnte, soweit es sich um Stromlinien handelte, ein ganzes Strömungsbild experimentell konstruiert werden.

Modell 2 (Fig. 26) bestand wie Modell 1 aus einem kastenförmigen Behältnis, das aber die innere Masse  $60 \times 60 \times 5$  cm hatte. Sein Boden und seine Schmalseiten bestanden aus Holz, und Vorder- und Rückseiten waren aus 8 mm dickem maschinengepresstem Glase ausgeführt,



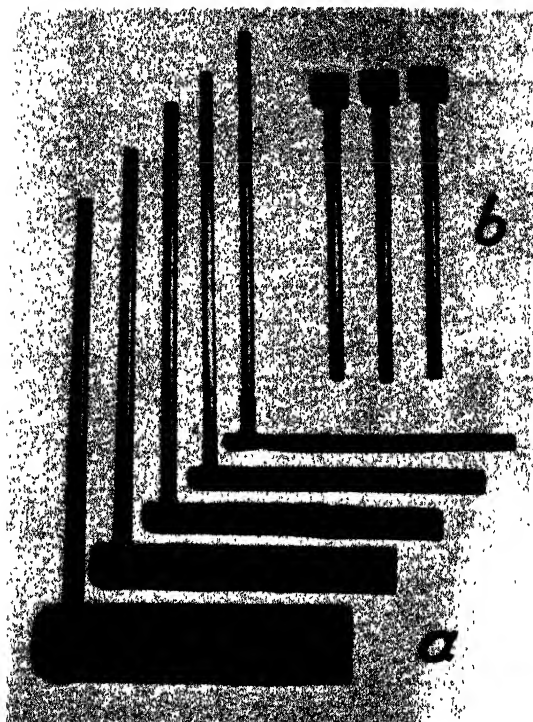


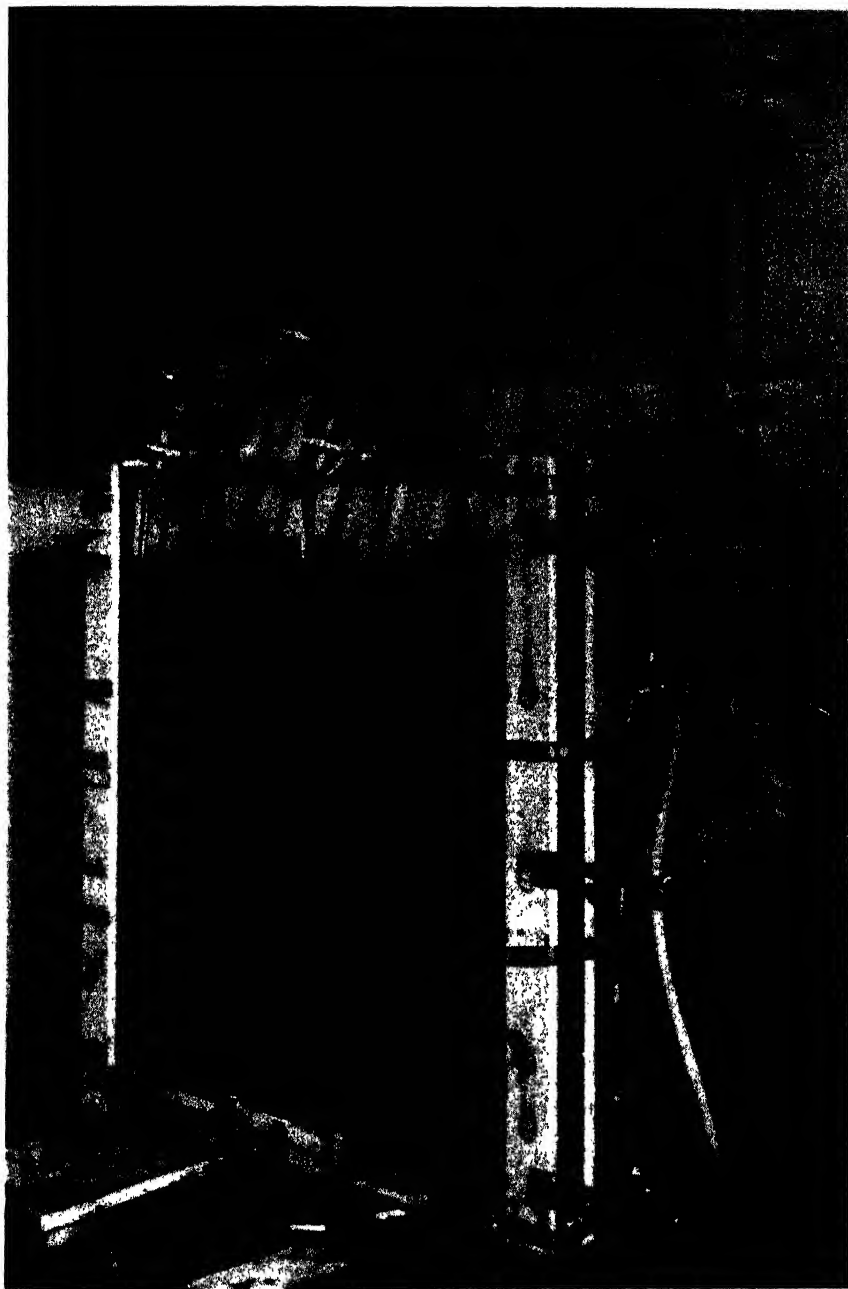
Fig. 25. Modelldränleitungen: a) zu Modell 1, b) zu Modell 2.

das vollständigen Einblick erlaubte. Das Glas wurde von Eisenzwingen gegen die Schmalseiten und gegen den Boden gepresst, und die Dichtung geschah mit Mennichkitt. Wie zu Modell 1 gehörten dazu auch weiter Buretten zur Einführung von Färbemitteln und ausserdem 5 cm lange Modelldränröhren (Fig. 25) von demselben Material und derselben Ausführung wie bei Modell 1.

### *Bodenmaterial.*

Bei den Modellversuchen wurden 6 verschiedene Bodenmaterialien verwendet, I—VI genannt, deren Ursprung und Beschaffenheit im Folgenden näher angegeben wird.

Material I bestand zum grössten Teile aus Mo-Schluff und war von dem Abhang des Rullstensos, der an Uppsala vorbeizieht, genommen worden. Das Material wurde in erster Linie zu gewissen Vorversuchen verwendet.



*Fig. 26.* Photographie von Modell 2.

Material II bestand hauptsächlich aus mittlerem Sand. Wie Material I war es von dem Uppsalienser Rullstensos genommen worden. Das Material kam bei den meisten Hauptversuchen zur Anwendung.

Material III bestand aus nicht ausgetrocknetem Ton mit einem Einschlag von Gytta von dem sogenannten Ultuna-kärret (Sumpfwiese ca. 7 km von Uppsala). Das Material wurde dazu verwendet, in den Modellen »undurchlässige Lager« zu schaffen.

Material IV bestand aus gemahlenem Quarz von Margretelund im östlichen Uppland und hatte ungefähr den Charakter von Mo-Schluff.

Material V und VI schliesslich bestanden wie IV aus gemahlenem Quarz, aber mit einer Korngrösse, die der Korngrösse bei mittlerem, bzw. grobem Sand entsprach.

Dass Material IV—VI bei den Untersuchungen verwendet wurde, hatte seinen Grund in seiner weissen Farbe, gegen die sich die dunkelgefärbten Stromlinien besser abhoben.

In Zusammenhang mit den Versuchen wurde die mechanische Zusammensetzung der verschiedenen Bodenmaterialien und ihre Durchlässigkeit für Wasser bestimmt. Die mechanische Zusammensetzung wurde nach der von der Internationalen Bodenkundlichen Gesellschaft empfohlenen Methode bestimmt (WRIGHT 1939, p. 37). Die Wasserdurchlässigkeit wurde mittels eines einfachen Apparates festgestellt, der aus einem lotrechten unten von einer durchlöcherten Platte begrenzten Zylinder von 10 cm Durchmesser bestand (s. die schematische Skizze in Fig. 27). Der Zylinder wurde

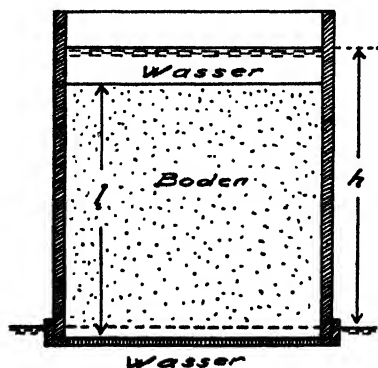


Fig. 27. Schematische Skizze der Apparatur für approximative Durchlässigkeitsbestimmungen.

bis zur Höhe von 10 cm mit Erde gefüllt, und während der Zylinder gleichzeitig mit seinem unteren Teile unter eine Wasserfläche von konstantem Niveau gesenkt und in dieser Lage gehalten wurde, wurde dann in den oberen Teil des Zylinders Wasser in so grosser Menge zugeführt, dass sich auch hier eine freie Wasserfläche mit konstantem Niveau bildete. Die per Zeiteinheit durch die Erde strömende Wassermenge wurde gemessen, worauf der Durchströmungskoeffizient berechnet werden konnte.

Die Zusammensetzung der verschiedenen Bodenmaterialien und der bei 10° C entstandene Strömungskoeffizient, angegeben in cm/sek wird in Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2.

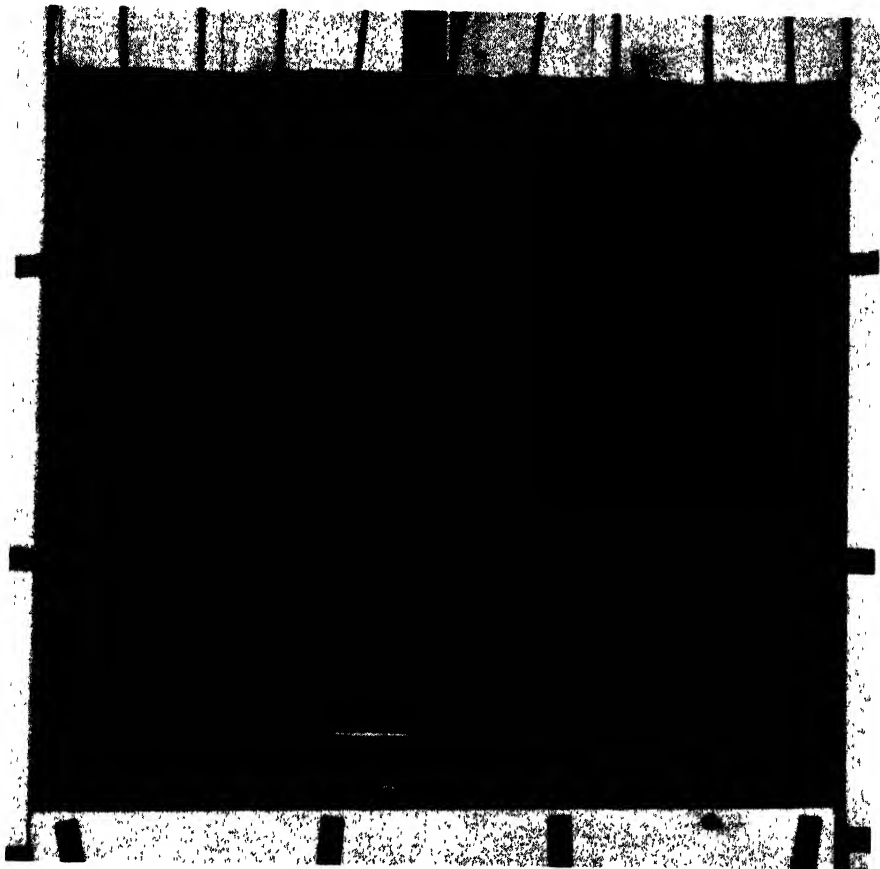
Zusammensetzung der bei den Modellversuchen verwendeten Bodenmaterialien.

Bodenmaterial	Zusammensetzung					Strömungskoeffizient cm/sek
	Kies (20-2 mm)	Sand (2-0.2 mm)	Mo (0.2-0.02 mm)	Schluff (0.02-0.002 mm)	Ton < 0.002 mm	
I		4.2	54.3	36.9	4.6	$1.27 \cdot 10^{-3}$
II		75.8	19.2	2.9	2.1	$1.36 \cdot 10^{-3}$
III			4.1	23.9	71.7	—
IV			57.1	39.6	3.2	$1.32 \cdot 10^{-3}$
V		100.0				$6.09 \cdot 10^{-1}$
VI	100.0					$1.31 \cdot 10^{-1}$

### Ausgeführte Versuche.

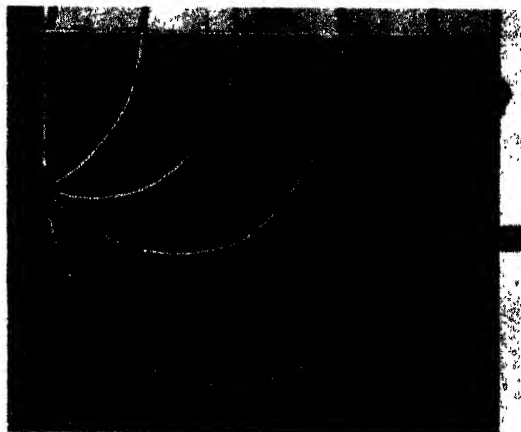
*Das Strömungsbild, das (58) entspricht.* Die erste Aufgabe, die der Verfasser bei den Modellversuchen sich stellte, war, das auf theoretischem Wege unter gewissen Voraussetzungen erhaltene Bild, das (58) entspricht und in Fig. 18 veranschaulicht ist, experimentell zu verifizieren. Das genannte Bild ist dadurch charakterisiert, dass das Strömungsbereich jeder Leitung einen rechteckigen Querschnitt von gegebener Grösse hat, weshalb es sich für eine Nachbildung im Modell gut eignet.

Eine Anzahl verschiedener Versuche wurden ausgeführt, Bei dem ersten derselben wurde Modell 2 verwendet, das dabei mit Material II bis zu einer Höhe von 52 cm über dem Boden des Modells gefüllt wurde. Eine Leitung von 2 cm Durchmesser wurde so eingelegt, dass



*Fig. 28. Modellversuch, an Modell 2 unter den Voraussetzungen ausgeführt, die zu (58) führten. Breite und Tiefe des durchströmten Bodenlagers 60 bzw. 52 cm. Lage der Leitungsachse 10 cm unter der Bodenfläche. Eine Farbenburetten spitze gerade oberhalb der Leitung angebracht, die übrigen 6,2, 12,9, 19,0 bzw. 24,8 cm rechts und links der genannten Spitze. Vgl. Fig. 18!*

ihr Mittelpunkt gerade gegenüber den beiden Seitenwänden des Modells und 10 cm unter der oberen Fläche des Bodenmaterials zu liegen kam. Nachdem das Modell bis über die Bodenfläche mit Wasser gefüllt war, wurde die Strömung in Gang gebracht, indem Wasser aus der Leitung abgeleitet wurde, während gleichzeitig über die Bodenfläche Wasser in solcher Menge zugeführt wurde, dass die dort befindliche Wasserfläche auf konstantem Niveau gehalten werden konnte. Die Buretten wurden hierauf mit ihren Spitzen in der Bodenfläche an

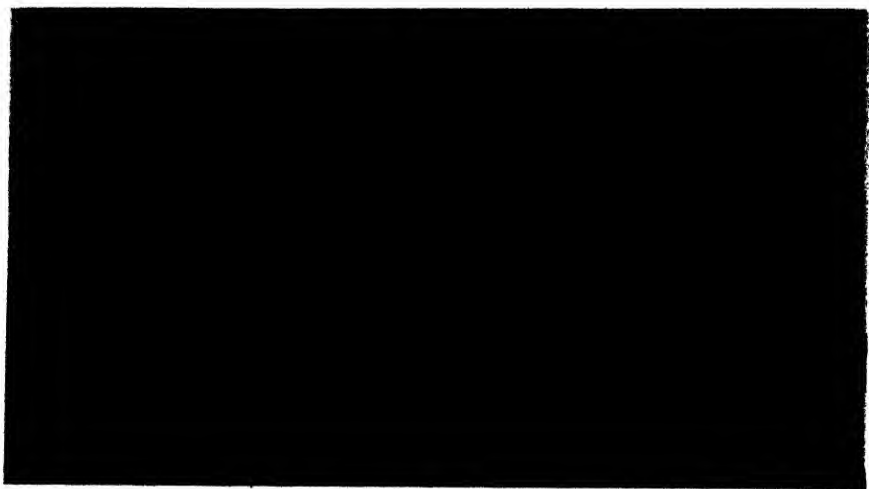


*Fig. 29.* Stromlinien, theoretisch aus berechnet und auf die bei den Modellversuchen erhaltenen Stromlinien aufgelegt.

Stellen angebracht, die im Text zu Fig. 28 angegeben sind. Durch sie wurden kleine Mengen gesättigter Kaliumpermanganatlösung als Färbemittel zugeführt, wodurch die durch die Burettenspitzen gehenden Stromlinien sich als dunkle Farbenbänder durch die Glaswand abzeichneten. Das Bild wurde unter Verwendung von Grünfilter photographiert; das Resultat findet man in Fig. 28. Die Strömung im Modell zeigt, wie man sieht, einen derartigen Verlauf, wie man ihn, wenn man von (58) und von dem Bild in Fig. 18 ausgeht, erwarten darf. Um die Vollständigkeit der Übereinstimmung zu zeigen, sind in Fig. 29 auf der rechten Seite des Modellbildes die den Farbenbändern entsprechenden Stromlinien, wie sie aus (63) berechnet wurden, eingezeichnet worden.

Ein zweiter ähnlicher Versuch wurde in Modell I ausgeführt, nachdem dieses mit Material II bis zu einer Höhe von 80 cm über dem Boden gefüllt und eine Leitung 15 cm unter der Bodenfläche eingelegt war. Das Resultat ergibt sich aus Fig. 30. Das Bild ist, wie man sieht, nicht ebenso deutlich wie Fig. 28, was in der Schwierigkeit seinen Grund hat, die grosse Glasfläche, um die es sich hier handelte, zum Zwecke der Photographierung ohne störende Reflexe gleichmässig beleuchten zu können.

Ein dritter Versuch wurde in Modell 1 in der gleichen Weise ausgeführt wie der oben beschriebene, aber mit dem Unterschiede, dass in Material II ein ca. 5 cm dickes undurchlässiges horizontales Tonlager aus Material III eingelagert wurde, das mit seiner oberen Fläche



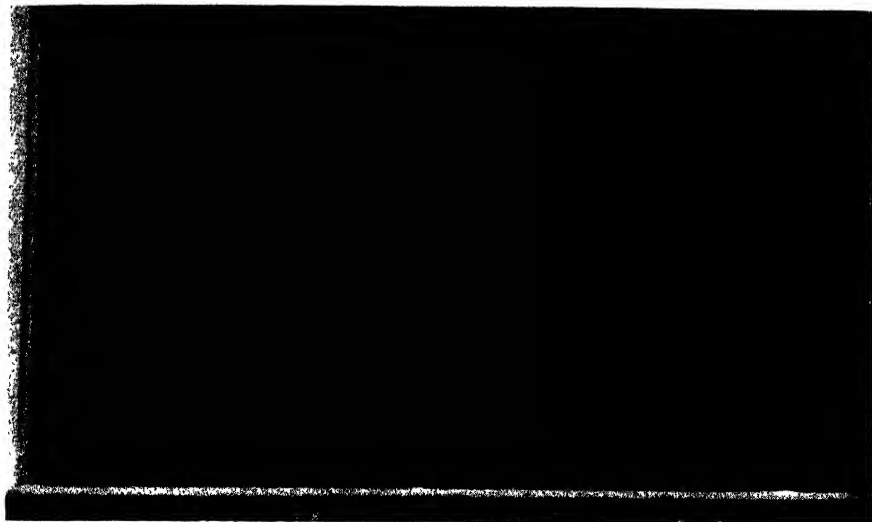
*Fig. 30.* Modellversuch, an Modell 1 unter den Voraussetzungen ausgeführt, die zu (58) führten. Breite und Tiefe des durchströmten Bodenlagers 60 bzw. 52 cm. Lage der Leitungsachse 15 cm unter der Bodenfläche. Eine Farbenburettenspitze gerade oberhalb der Leitung angebracht, die übrigen 8,3, 8,7, 36,4 bzw. 52 cm rechts und links der genannten Spitze. Vgl. Fig. 18!

37 cm unter der Bodenfläche zu liegen kam. Das erhaltene Bild wird in Fig. 31 wiedergegeben. Wie man sieht, zeigt es ein Aussehen, das dem Bild von Fig. 30 gleicht, jedoch mit dem Unterschiede, dass die Stromlinien, wie erwartet, nur auf eine geringere Tiefe hinuntergehen.

Der vierte und letzte Versuch der Serie wurde in Modell 1 auf dieselbe Weise wie der unmittelbar vorangehende ausgeführt, jedoch mit dem Unterschiede, dass das undurchlässige Lager mit seiner oberen Fläche 15 cm unter der Bodenfläche angebracht war. Die Leitung kam nun mit ihrem Mittelpunkt in der Grenzschrift zwischen den Lagern zu liegen. Das sich ergebende Bild zeigt Fig. 32; es weist den gleichen Verlauf auf, wie man ihn, von (58) ausgehend, erwarten darf.

*Das Strömungsbild, das (48) entspricht.* Die zweite Aufgabe, die bei dem Modellversuche gestellt wurde, war, experimentell das Bild wiedergeben, das (48) (Fig. 16) entspricht, d. h. das Bild, das sich ergibt, wenn in einer Reihe von Leitungen mit im übrigen gleicher Kapazität eine Leitung eine andere Kapazität hat als ihre Nachbarn.

Der Versuch wurde an Modell 2 ausgeführt, das bis zur Höhe von 50 cm mit Material II gefüllt wurde. In der Tiefe von 10 cm unter der Bodenfläche wurden drei Dränleitungen von 2 cm Durchmesser

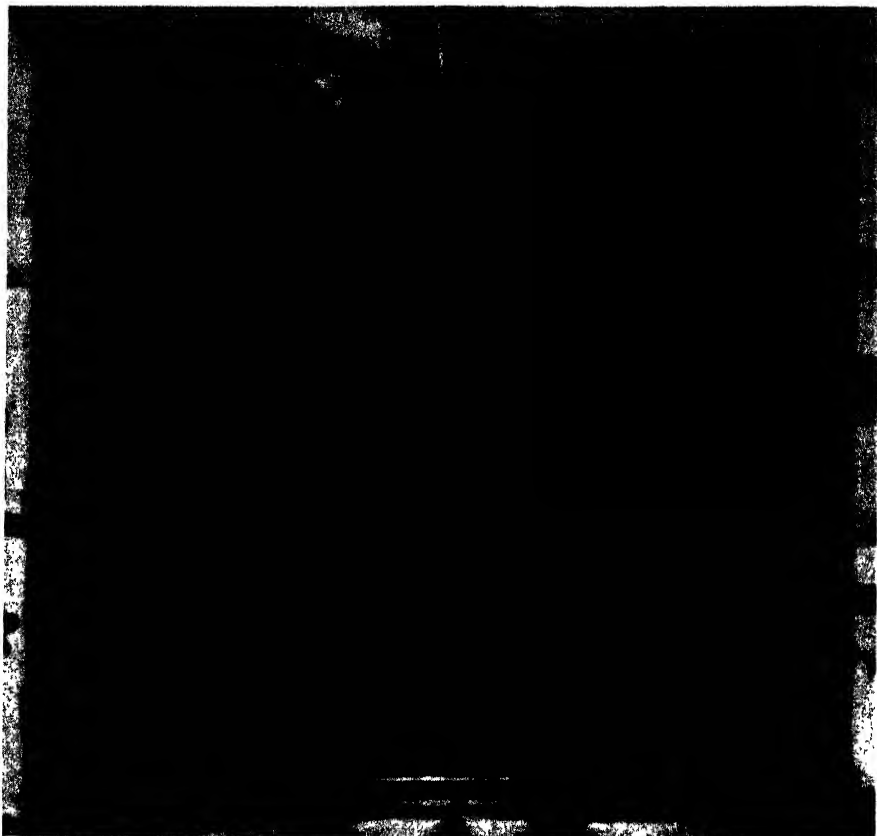


*Fig. 31.* Modellversuch, an Modell 1 unter den Voraussetzungen ausgeführt, die zu (58) führten. In der Bodenmasse ist ein undurchlässiges Lager eingelegt, dessen obere Fläche 37 cm unter der Bodenfläche liegt. Lage der Leitungsachse 15 cm unter der Bodenfläche. Anbringung der Farbenburettens dieselbe wie in Fig. 30. Vgl. Fig. 18!



*Fig. 32.* Modellversuch, an Modell 1 unter den Voraussetzungen ausgeführt, die zu (58) führten. Im Boden ist ein undurchlässiges Lager eingelegt, dessen obere Fläche im Niveau mit der Leitungsachse 15 cm unter der Bodenfläche liegt. Anbringung der Farbenburettens die gleiche wie in Fig. 30.





*Fig. 33.* Modellversuch, an Modell 2 unter den Voraussetzungen ausgeführt, die zu (48) führten. Breite und Tiefe des durchströmten Bodenlagers 60 bzw. 55 cm. Die Achsen der drei Leitungen liegen 10 cm unter der Bodenfläche und in 30 cm Abstand voneinander. Die Wasserführung der linken Leitung dreimal so gross als die der übrigen. Spitzen der Farbenburetten 9,1, 18,2, 25,4, 34,6, 39,3, 45,6 und 53,3 cm von der linken Schmalseite des Modells entfernt angebracht. Vgl. Fig. 16!

ingelegt, eine in der Mitte und je eine bei den beiden Seitenwänden. Die Kapazität der Leitungen konnte durch Drosselung der Abläufe reguliert werden. Zuerst wurde die Regulierung so vorgenommen, dass die Kapazität der Mittelleitung doppelt so gross war wie die einer jeden der beiden Seitenleitungen. Das jetzt entstandene Bild bestand aus einem ganzen Bild für die Mittelleitung, das das gleiche Aussehen hatte wie die früher erhaltenen, und zu beiden Seiten davon aus zwei ihm entsprechenden Halbbildern. Hierauf wurde die Kapazität der



*Fig. 34.* Modellversuch, an Modell 2 unter den Voraussetzungen ausgeführt, die zu (66) führten. Breite und Tiefe des durchströmten oberen Bodenlagers 60 bzw. 45 cm. Lage der Leitungsachse 10 cm unter der Bodenfläche. Spitzen der Farbenburettens 3,6, 13,3, 19,4, 23,0, 35,8, 41,2, 49,7 und 46,4 cm von der linken Schmalseite des Modells entfernt angebracht. Vgl. Fig. 20!

rechten Seitenleitung so gesteigert, dass sie dreimal grösser war als die der Mittelleitung. Das sich jetzt ergebende Bild ist in Fig. 33 wiedergegeben. Es zeigt, wie man sieht, Ähnlichkeit mit dem von (48) herstammenden Bild der Fig. 16. Die Übereinstimmung ist jedoch nicht vollständig und kann das auch nicht sein, u. a. weil die ebene Begrenzungsfläche, aus der die linke Wand des Modells besteht, in Fig. 16 keine Entsprechung hat.

Aus der Modellströmung ergibt sich die im Zusammenhang mit der Diskussion von (48) und Fig. 16 betonte Tatsache, dass die stärkere Leitung einen Teil der Bodenfläche entwässert, der jenseits ihrer nächsten Nachbarn gelegen ist.

*Das Strömungsbild, das (66) entspricht.* Die dritte bei den Modellversuchen gestellte Aufgabe war, das Strömungsbild wiederzugeben, das (66) (Fig. 20) entspricht, d. h. das Bild, das sich ergibt, wenn eine Anzahl von Leitungen in einen Boden eingelegt werden, in dem eine lotrechte Primärströmung vorkommt.

Der Versuch wurde an Modell 2 ausgeführt, das zuerst bis zu einer Höhe von 15 cm mit Material VI — dem durchlässigsten aller Materialien — gefüllt wurde. Über Material VI wurde dann in einem 40 cm dicken Lager Material II gebreitet, und hier wurde mitten im Modell, 10 cm unter der Bodenfläche, eine Leitung von 2 cm Durchmesser niedergelegt. Anfangs wurde dann das Wasser nur durch eine Bodenöffnung im Modell entfernt. Hierdurch entstand eine Strömung durch das oberste Bodenlager, die infolge des grossen Unterschiedes der Durchlässigkeit der beiden Materialien als eine Parallelströmung betrachtet werden konnte. Hierauf wurde das Wasser auch durch die eingelegte Leitung in ebenso grosser Menge wie durch die Bodenöffnung ausströmen gelassen. Das Bild, das sich ergab, zeigt Fig. 34. Wie man sieht, zeigt es gute Übereinstimmung mit der auf theoretischem Wege erhaltenen Fig. 20, obwohl die Übereinstimmung doch weder vollständig ist noch vollständig gemacht werden kann, weil bei der Konstruktion von Fig. 20 vorausgesetzt wurde, dass die Entfernung des saugenden Lagers unendlich sei.

### c. Diskussion und Folgerungen.

Im Obigen ist die Grundwasserströmung in einem völlig wassergefüllten nach seiner Durchlässigkeit homogenen gedrännten Boden diskutiert und eine Anzahl von Strömungsbildern, die unter verschiedenen Verhältnissen sich ergaben, auf theoretischem Wege konstruiert und teilweise durch Modellversuche nachgeprüft worden. Aus dem erhaltenen Material können gewisse allgemeine Gesetzmässigkeiten bezüglich der Wasserbewegung unter den in den Überschriften angegebenen Verhältnissen aufgestellt werden.

So gilt u. a. der Satz, dass ein Teil des strömenden Wassers sich von der Bodenfläche zur Leitung bewegt, ohne Bodenlager zu passieren, die tiefer liegen als der Mittelpunkt der Leitung, während ein anderer Teil erst derartige Lager passiert. Nehmen wir nun an, dass eine Primärströmung nicht vorkommt, und haben wir einen Boden mit grosser Ausdehnung nach der Tiefe und der Seite hin, in den eine einzelne Leitung eingelegt ist, die im Verhältnis zur Dräntiefe einen kleinen Durchmesser hat, so gilt der Satz, dass *ein jeder der genannten*

*Teile die Hälfte der totalen in die Leitung einströmenden Wassermenge beträgt (was u. a. aus Fig. 9 hervorgeht). Werden in den Boden mehrere Leitungen von untereinander gleicher Kapazität und in untereinander gleichem Abstand gelegt und ist — was in der normalen Praxis das Gewöhnliche ist — dieser Abstand im Verhältnis zur Dräntiefe gross, so gilt die gleiche Regel noch immer mit guter Annäherung. Weiter gilt der Satz, dass der erste Teil des Wasserstromes auf seinem Wege zur Leitung durch den Teil der Bodenfläche geht, der unmittelbar über der Leitung liegt. Der betreffende Teil hat die Form eines Streifens, dessen Breite annähernd so gross ist wie die doppelte Dräntiefe. Der zweite Teil des Stroms geht durch die übrigen Teile der Bodenfläche.*

Eine zweite Gesetzmässigkeit zeigt sich darin, dass, wenn mehrere Leitungen in den Boden eingelegt sind und eine von ihnen grössere Wasserzuführung hat als die übrigen, diese Leitung auch das Wasser an sich ziehen kann, das durch die Bodenfläche jenseits der Nachbarleitungen geht (vgl. Fig. 16 und 33).

Werden Leitungen in einen Boden gelegt, in dem eine vertikal gerichtete Primärströmung vorkommt, so gilt der Satz, dass die Leitungen das Wasser, das durch die ihnen am nächsten gelegenen Teile der Bodenfläche geht, an sich ziehen, während das Wasser, das durch die übrigen Teile der Bodenfläche geht, niemals in die Leitungen kommt, sondern weiter durch den Boden nach unten geht (vgl. Fig. 20 und 34.)

Werden Leitungen in einen Boden eingelegt, in dem eine mit der Bodenfläche parallele Primärströmung vorkommt, z. B. in einen Boden mit geneigter Fläche, so führt die Primärströmung dazu, dass das Strömungsbereich, falls dieses nach der Tiefe hin grosse Ausdehnung hat, in dieser Richtung abgegrenzt wird.

Ausser diesen allgemeingültigen Regeln, die sich direkt aus den erhaltenen Strömungsbildern ergeben und die deshalb schon früher erwähnt wurden, kann aber noch eine Menge anderer Folgerungen genereller Art und von theoretischem Interesse und praktischer Bedeutung gezogen werden. Einige derartige Folgerungen sollen im Folgenden behandelt werden.

### Die Abhängigkeit der abgeleiteten Wassermenge von verschiedenen Faktoren.

In Hinblick auf praktische Probleme ist es von besonderem Interesse zu erforschen, wie die per Zeiteinheit abgeleitete Wassermenge  $Q$  von verschiedenen Faktoren beeinflusst wird.

Aus der Potentialfunktion, die zu den verschiedenen abgeleiteten Strömungsbildern (32) und (39) usw. gehört, ergibt sich, dass in allen Fällen die von einer Leitung abgeleitete Wassermenge  $Q$  mit dem Potential  $\varphi$  eines bestimmten Punktes der Bodenmasse, dieses im Verhältnis zu dem Potential der Bodenfläche gemessen, direkt proportional ist. Da  $\varphi = kh$  ist, folgt daraus sofort die Regel, dass *die von einer einzelnen Dränleitung oder von einem Dränsystem abgeleitete Wassermenge immer der Durchlässigkeit des Bodens proportional ist*. Wie  $Q$  in einem bestimmten Spezialfall mit  $k$  variiert, wird als Exempel an der Kurve I in Fig. 35 veranschaulicht. Weiter erhält man als eine zweite Regel, dass *die abgeleitete Wassermenge immer dem Unterschiede zwischen dem Wasserstand in der Bodenfläche und dem Wasserstand in der Leitung proportional ist*. Wenn so z. B. das Wasser irgendwie beim Abfließen aus der Leitung gestaut wird, etwa durch eine Aufdämmung unterhalb der Dränausmündung, so nimmt der Abfluss proportional mit der Erhöhung der Druckfläche in der Leitung ab.

Eine andere Frage von Interesse ist, wie die ablaufende Wassermenge  $Q$  durch den Röhrendurchmesser beeinflusst wird. Um diese Frage zu studieren, nehmen wir an, der Abstand  $T$  von der Bodenfläche zum Oberrand der Leitung sei konstant und die Leitung sei die ganze Zeit volllaufend. Vergrössern wir nun den Leitungsdurchmesser, so vergrössern wir  $a$ . Daraus folgt nach den Potentialfunktionen, dass  $Q$  mit vergrössertem Leitungsdurchmesser zunehmen muss. Studieren wir jedoch den Verlauf genauer, so finden wir, dass die Veränderung von  $Q$  ziemlich gering ist, wenn der Leitungsdurchmesser innerhalb der in der Praxis denkbaren Grenzen variiert. Dies wird durch ein herausgegriffenes Beispiel beleuchtet, das als Kurve II in Fig. 35 dargestellt ist. Wir können als Regel aufstellen, dass *die per Zeiteinheit aus einem Dränsystem abgeleitete Wassermenge mit vergrössertem Leitungsdurchmesser etwas, jedoch unbeträchtlich steigt*.

Wir richten weiter unsere Aufmerksamkeit auf den Zusammenhang zwischen der ablaufenden Wassermenge und der als  $T$  gemessenen Dräntiefe. Aus den abgeleiteten Potentialfunktionen ergibt sich, dass  $Q$  mit steigendem Werte von  $T$  abnimmt, wenn  $h$  konstant ist. Das gilt, wenn der Rezipient, in den das Leitungssystem mündet, mit seiner Fläche über dem System liegt. Wir erhalten also die Regel, dass *die per Zeiteinheit aus einem Dränsystem abströmende Wassermenge mit vergrösserter Dräntiefe abnimmt, wenn das Leitungssystem keinen freien Auslauf hat*. Die Beeinflussung ist jedoch nicht allzu gross, was aus einem herausgegriffenen Zahlenbeispiel (Fig. 35, Kurve IV) sich ergibt. Hat andererseits die Leitung freien Auslauf, so kann vorausgesetzt

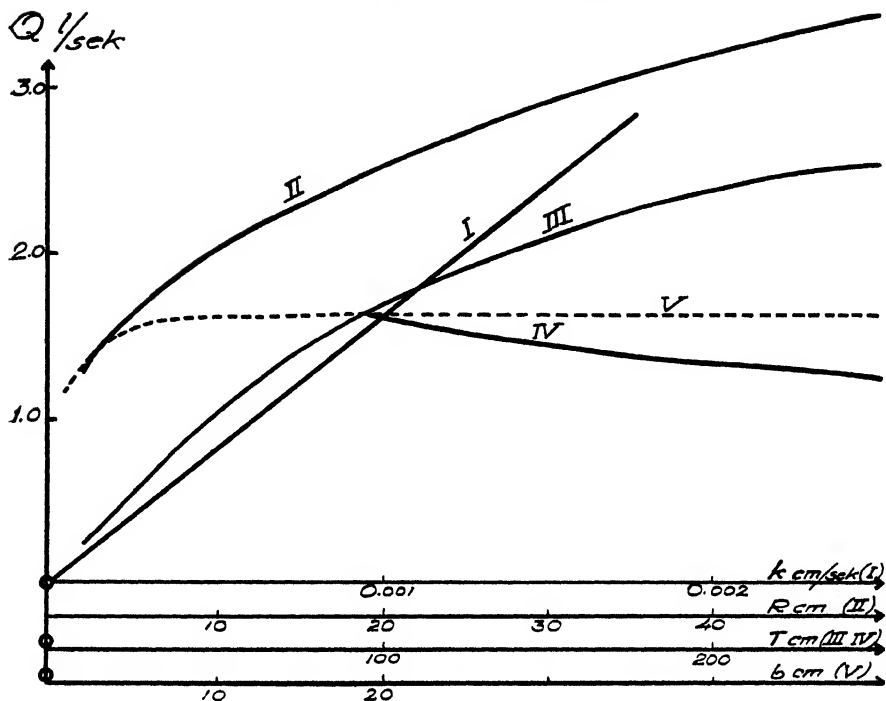


Fig. 35. Die Abhängigkeit der zu einer Dränleitung hinstromenden Wassermenge ( $Q$ ) von:  $k$  (Kurve I), wenn  $T = h = 100$  cm,  $b = c = \infty$  und  $R = 5$  cm;  $R$  (Kurve II), wenn  $k = 1 \cdot 10^{-3}$ ,  $T = h = 100$  cm,  $b = c = \infty$ ;  $T$  (Kurve III), wenn  $k = 1 \cdot 10^{-3}$ ;  $T = h = 100$  cm und  $R = 5$  cm;  $T$  (Kurve IV), wenn  $k = 1 \cdot 10^{-3}$ ;  $h = 100$  cm;  $b = c = \infty$  und  $R = 5$  cm;  $b$  (Kurve V), wenn  $k = 1 \cdot 10^{-3}$ ;  $T = h = 100$  cm;  $c = \infty$  und  $R = 5$  cm.  $Q$  in l/sec per 100 m Leitungslänge.

werden, dass die Druckfläche in der Leitung mit vergrößerter Drän-tiefe sinkt, was bedeutet, dass  $h$  zunimmt. Dies wirkt, wie oben erwähnt, steigend auf den Abfluss, u. zw. in höherem Grade, als die gleichzeitige Vergrößerung von  $T$  vermindern wirkt. Wir erhalten also die Regel, dass die per Zeiteinheit aus einem Dränsystem abfließende Wassermenge mit vergrößerter Dräntiefe steigt, wenn die Leitung freien Auslauf hat. Ein Zahlenbeispiel ist in Kurve III von Fig. 35 zu finden.

Die nächste Frage ist, inwieweit  $Q$  durch den Dränabstand  $b$  beeinflusst wird. Aus den Potentialfunktionen, die für mehrere eingelegte Leitungen gelten, ergibt sich, dass  $Q$  mit vermindertem Werte von  $b$  abnimmt, und wir erhalten daher die Regel, dass die per Zeiteinheit zu einer bestimmten Leitung hinstromende Wassermenge umso geringer ist, je geringer der Abstand zu anderen Leitungen ist. Die Regel wird zahlen-

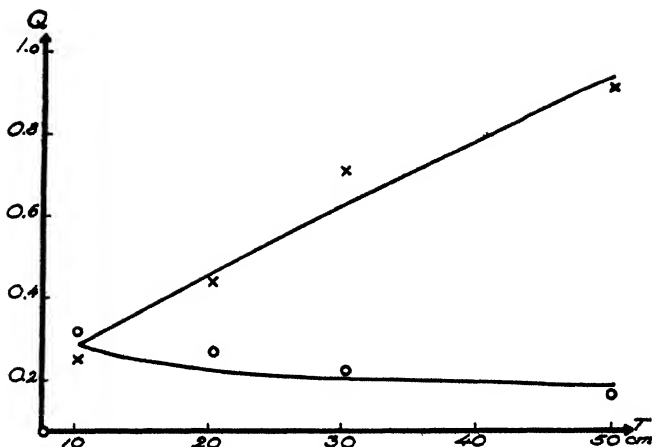


Fig. 36. Die Abhängigkeit der zu einer Dränleitung hinströmenden Wassermenge ( $Q$ ) von  $T$ , wenn  $k = 1,36 \cdot 10^{-2}$  cm/sek,  $b = 150$  cm,  $c = 80$  cm und  $R = 2$  cm sind. Die obere Kurve und die Kreuze geben den Zusammenhang nach den theoretischen Berechnungen bzw. das Resultat der Modellversuche an wenn  $h = T$  ist. Die untere Kurve und die eingeringelten Punkte geben die gleichen Faktoren an, unter der Voraussetzung dass  $h = 10$  cm ist.  $Q$  in cm<sup>3</sup>/sek per cm Leitungslänge.

mässig durch Kurve V in Fig. 35 beleuchtet. Aber verringerter Dränabstand auf einer bestimmten Bodenfläche bedeutet vergrößerte Anzahl von Dränleitungen, weshalb leicht gezeigt werden kann, dass die von der betreffenden Fläche abströmende Wassermenge mit vermindertem Dränabstand steigt. Wir erhalten als Regel, dass die Wassermenge, die per Zeit- und Flächeneinheit zu einem Dränsystem hinströmt, mit vermindertem Dränabstand steigt.

Schliesslich stellen wir die Frage, inwieweit der Abstand zwischen der Bodenfläche und einem nach unten hin abgrenzenden undurchlässigen Lager  $Q$  beeinflusst. Aus (39) oder (62) erhalten wir als Antwort die Regel, dass die Wassermenge, die per Zeiteinheit aus einem Dränsystem abströmt, mit abnehmendem Abstand zwischen der Bodenfläche und dem nach unten abgrenzenden Bodenlager etwas abnimmt.

Die oben auf theoretischer Grundlage vorgebrachten Regeln für die Abhängigkeit der abströmenden Wassermenge von der Dräntiefe können durch Modellversuche bestätigt werden. Einen solchen hat der Verfasser an Modell 2 (s. S. 61) ausgeführt. Bei dem Versuche wurde das Modell bis zu einer Höhe von 80 cm über dem Boden mit Bodenmaterial II (s. S. 64) gefüllt, worauf eine Modelldränleitung von 2 cm Durchmesser des auf S. 61 beschriebenen Typus mitten zwischen den Schmalseiten des Modells und in variierendem Tiefenabstand ( $T$ )

unter der Bodenfläche in die Erde gelegt wurde. Nachdem der Boden bis über die Oberfläche mit Wasser gefüllt und eine bestimmte Druckdifferenz ( $h$ ) zwischen der Oberfläche und dem Innern der Leitung geschaffen war, wurde die für jede Tiefe ( $T$ ) per cm der Leitungslänge abgeführte Wassermenge  $Q$  bestimmt. Die erhaltenen Resultate sind in Tabelle 3 ersichtlich:

*Tabelle 3.*

Aus Modell 2 bei variierender Dräntiefe abgeleitete Wassermengen.

Dräntiefe, ( $T$ ) cm	Druckdiffe- renz ( $h$ ) cm	Abgeleitete Wassermenge ( $Q$ ) cm <sup>3</sup> per cm Leitungs- länge	Dräntiefe ( $T$ ) cm	Druckdiffe- renz ( $h$ ) cm	Abgeleitete Wassermenge ( $Q$ ) cm <sup>3</sup> per cm Leitungs- länge
10	10	0.23	10	10	0.26
20	20	0.41	20	10	0.24
30	30	0.74	30	10	0.23
50	50	0.90	50	10	0.19

Die Ergebnisse sind in Form von Punkten in das Diagramm von Fig. 36 eingesetzt. In diesem Diagramm sind zum Zwecke des Vergleiches auch die Werte von  $Q$ , die auf theoretischem Wege auf Grundlage von (62) erhalten wurden, in Form zweier Kurven eingezeichnet worden. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung zwischen den experimentellen und den theoretischen Werten gut.

### Die Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit von verschiedenen Faktoren.

Ein anderer Faktor, der für praktische Probleme von Interesse ist, ist die Frage, wie die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers in den verschiedenen Strömungsbildern von verschiedenen Faktoren beeinflusst wird. Eine erste grobe Auffassung über die Grösse der Geschwindigkeit an verschiedenen Punkten der Bodenmasse können wir erhalten, wenn wir die Dichte der Strom- oder Potentiallinien in den verschiedenen Strombildern betrachten. Sollen jedoch die Geschwindigkeitsverhältnisse näher erforscht werden, so muss die Geschwindigkeit direkt berechnet werden, was, auf Grundlage der gefundenen Stromlinien und Potentialfunktionen, sich leicht tun lässt, da



$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (71)$$

und

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (72)$$

So erhält man aus (32) für Strombilder des in Fig. 9 dargestellten Typus

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{[(x+a)^2 + y^2](x-a) - [(x-a)^2 + y^2](x+a)}{[(x+a)^2 + y^2][(x-a)^2 + y^2]} \\ v_y &= \frac{Q}{\pi} \cdot \frac{2axy}{[(x+a)^2 + y^2][(x-a)^2 + y^2]} \end{aligned} \right\}, \quad (73)$$

aus (38) oder (39) für Strömungsbilder des in Fig. 12 dargestellten Typus

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{Q}{4c} \cdot \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{2c}(x-a) \cdot \cosh \frac{\pi}{2c} y}{\sin^2 \frac{\pi}{2c}(x-a) + \sinh^2 \frac{\pi}{2c} y} - \frac{\sin \frac{\pi}{2c}(x+a) \cdot \cosh \frac{\pi}{2c} y}{\sin^2 \frac{\pi}{2c}(x+a) + \sinh^2 \frac{\pi}{2c} y} \right] \\ v_y &= \frac{Q}{4c} \cdot \left[ \frac{\cos \frac{\pi}{2c}(x-a) \cdot \cosh \frac{\pi}{2c} y}{\sin^2 \frac{\pi}{2c}(x-a) + \sinh^2 \frac{\pi}{2c} y} - \frac{\cos \frac{\pi}{2c}(x+a) \cdot \cosh \frac{\pi}{2c} y}{\sin^2 \frac{\pi}{2c}(x+a) + \sinh^2 \frac{\pi}{2c} y} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (74)$$

aus (46) oder (47) für Strombilder des in Fig. 15 dargestellten Typus

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{Q}{2b} \left[ \frac{\sinh \frac{2\pi}{b}(x-a)}{\cosh \frac{2\pi}{b}(x-a) - \cos \frac{2\pi}{b} y} - \frac{\sinh \frac{2\pi}{b}(x+a)}{\cosh \frac{2\pi}{b}(x+a) - \cos \frac{2\pi}{b} y} \right] \\ v_y &= \frac{Q}{2b} \left[ \frac{\sin \frac{2\pi}{b} y}{\cosh \frac{2\pi}{b}(x-a) - \cos \frac{2\pi}{b} y} - \frac{\sin \frac{2\pi}{b} y}{\cosh \frac{2\pi}{b}(x+a) - \cos \frac{2\pi}{b} y} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (75)$$

sowie aus (62) oder (63) für Strömungsbilder des in Fig. 18 dargestellten Typus

$$\begin{aligned}
 v_y &= \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{2K}{b} \cdot \operatorname{sn} \frac{2K}{b} y_i \cdot \operatorname{cn} \frac{2K}{b} y_i \cdot \operatorname{dn} \frac{2K}{b} y_i \cdot \\
 & \left[ \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i - \xi'^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i}{\operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} y_i \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} y_i \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i + \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} y_i \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i} \right. \\
 & \left. \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i - \xi'^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i}{\operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} y_i \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} y_i \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i + \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} y_i \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i} \right] \\
 v_x &= \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{2K}{b} \left[ \xi'^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} y_i \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} y_i + \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} y_i \right] \cdot \\
 & \left[ \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i}{\operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i + \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i} \right. \\
 & \left. \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i}{\operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} (x+a)_i + \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i \cdot \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{b} (x-a)_i} \right] \cdot
 \end{aligned}
 \tag{76}$$

Das grösste Interesse zieht vom praktischen Standpunkt aus die Geschwindigkeit an der Peripherie der Leitung und in der Bodenfläche auf sich. Wenn wir zunächst die Verhältnisse an der *Peripherie der Leitung* betrachten, so lässt eine nähere Analyse der Geschwindigkeitsgleichungen erkennen, dass die Geschwindigkeit dort an verschiedenen Punkten der Peripherie bei Ortsveränderung um das Rohr herum sehr kleine Variationen aufweist, sobald das undurchlässige Lager nicht bis hinauf zur Leitung reicht. *Die Einflussgeschwindigkeit und damit die per Flächeneinheit einströmende Wassermenge können daher vom praktischen Standpunkt aus für verschiedene Teile der Peripherie der Leitung als gleich angesehen werden.* Es strömt also eine ebenso grosse Wassermenge von unten wie von jeder Seite und von oben ein. So erzeugt die eingelegte Dränleitung unter sich einen nach oben gerichteten Wasserstrom, dessen Geschwindigkeit beträchtlich sein kann. Dieser Strom muss bei Mo- und Schluffböden den Auftrieb von Bodenpartikeln bewirken können und dürfte daher eine stark mitwirkende Ursache für das Einschlämmen von Erdmaterial in die Leitung sein. Schon lange wird als Schutz gegen derartige Einschlämmung die Vorkehrung getroffen, dass Kies um die Leitung, besonders über ihre Fugen, gelegt wird, sobald sie in den Boden gebracht ist. Das oben Gesagte zeigt, dass, wenn das Verlegen von Kies wirksam sein soll, es *rund um* die Leitung und vielleicht in erster Hand unter derselben erfolgen muss.

Nun richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Bodenfläche, wo  $x=0$  und wo  $v_y=0$ , weshalb  $v=v_x$  ist. Die Einflussgeschwindigkeit in der Bodenfläche erhalten wir, indem wir in dem für den betreffenden Spezialfall geltenden Ausdruck für  $v_x$   $x=0$  setzen. Nehmen wir also zum Beispiel an, die Verhältnisse seien derart, dass das Strömungsbild den in Fig. 15 dargestellten Typus zeige, so erhalten wir aus (75) die Geschwindigkeit in der Bodenfläche mit

$$v_x = -\frac{Q}{b} \frac{\sinh \frac{2\pi}{b} a}{\cosh \frac{2\pi}{b} a - \cos \frac{2\pi}{b} y}. \quad (77)$$

Aus dem Ausdruck ergibt sich, dass die Geschwindigkeit ihren grössten Wert gerade oberhalb der Leitung hat, wo er

$$v_x = -\frac{Q}{b} \frac{\sinh \frac{2\pi}{b} a}{\cosh \frac{2\pi}{b} a - 1} \quad (78)$$

beträgt.

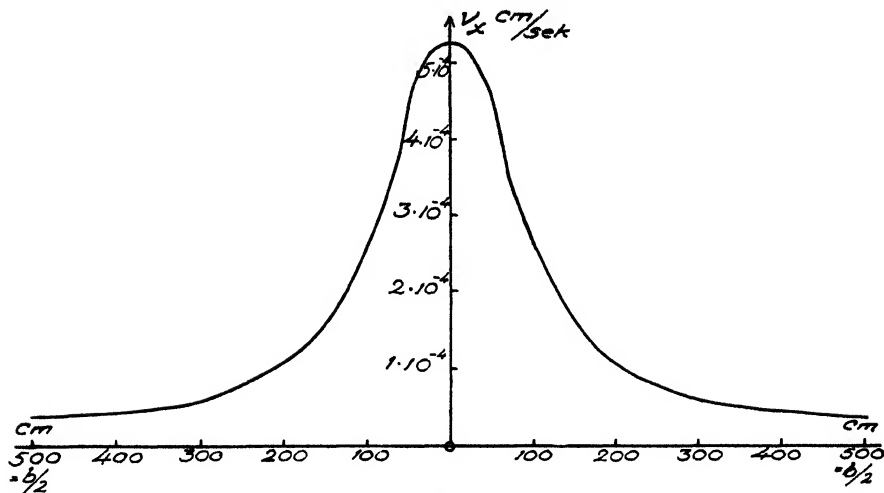


Fig. 37. Grösse der Strömungsgeschwindigkeit an der Bodenfläche in verschiedenen Entfernungen von einer Leitung, aus (77) berechnet wenn  $T = h = 100$  cm,  $k = 1 \cdot 10^{-3}$ ,  $b = 1000$  cm,  $c = \infty$  und  $r = 5$  cm. Die Achse der Leitung liegt in der Ebene der  $v_x$ -Achse.

Bei Verschiebung gegen die Seiten nimmt er ab, die ersten Dezimeter langsam, dann schneller und zuletzt wieder langsam, und erreicht sein Minimum mitten zwischen den Leitungen, wo er

$$v_x = -\frac{Q}{b} \frac{\sinh \frac{2\pi}{b} a}{\cosh \frac{2\pi}{b} a + 1} \quad (79)$$

beträgt. Der Verlauf wird durch Fig. 37 veranschaulicht. Wie man sieht, ist der Unterschied in der Geschwindigkeit gerade oberhalb der Leitung und bis zu einer Entfernung von derselben, die der Dräntiefe entspricht, beträchtlich. Der beträchtliche Unterschied in der Einflussgeschwindigkeit, den FLODKVIST (1931, 1935) gerade oberhalb einer Leitung und unmittelbar neben ihr beobachtet und den er, natürlich mit Recht, auf die verschiedene Durchlässigkeit des Bodens zurück geführt hat, ist also, wie man sieht, auch in den rein hydrodynamischen Tatsachen begründet.

Die Ausdrücke (73) bis (76) geben uns die Möglichkeit, die Einwirkung verschiedener Faktoren auf die Geschwindigkeitsverteilung in der Bodenfläche zu studieren. Zuerst richten wir dabei unsere Aufmerksamkeit auf die *Dräntiefe*, wobei wir finden, dass vergrößerte

*Dräntiefe auf die Geschwindigkeitsverteilung in der Bodenfläche ausgleichend wirkt.* Eine Vergrösserung der Dräntiefe bringt nämlich eine Vergrösserung der Dränintensität mit sich, die prozentuell grösser ist, je weiter man von der Leitung wegkommt. Wir können daraus die für die Praxis wichtige Folgerung ziehen, dass eine Verringerung oder eine Vergrösserung der Dräntiefe in erster Hand die Entwässerungsverhältnisse an jenen Stellen beeinflusst, die von den Leitungen am weitesten entfernt sind, d. h. die mitten zwischen ihnen liegen.

Hierauf studieren wir das Einwirken des Dränabstandes auf die Geschwindigkeitsverteilung, wobei wir konstatieren, dass verringerter Dränabstand die Einflussgeschwindigkeit an allen Punkten der Bodenfläche vergrössert, dass aber die Steigerung in der weitesten Entfernung von den Leitungen am grössten ist. Wir erhalten daher *die Regel, dass verringerter Dränabstand auf die Geschwindigkeitsverteilung in der Bodenfläche ausgleichend wirkt.*

Weiter richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Frage, inwieweit *der Abstand zwischen der Bodenfläche und einem die Strömung nach unten hin begrenzenden undurchlässigen Lager* die Geschwindigkeitsverteilung in der Bodenfläche beeinflusst. Wir erhalten dabei die Regel, dass ein *gesteigerter Wert des in Rede stehenden Abstandes geeignet ist, die Geschwindigkeitsverteilung in der Bodenfläche ein wenig auszugleichen.*

Schliesslich können wir, auf Grundlage von (73) bis (76), die Einwirkung einer Primärströmung auf die Geschwindigkeitsverteilung in der Bodenfläche studieren. Wir finden dabei, dass *eine vertikal gerichtete Primärströmung die Durchströmungsgeschwindigkeit auf der ganzen Fläche um einen konstanten Wert erhöht, während eine horizontal gerichtete Strömung dieser Art auf die genannte Geschwindigkeit nicht einwirkt.* Aus dem eben Angeführten folgt, dass, wenn ein Boden mit geneigter Bodenfläche dräniert wird und die Strömungsverhältnisse grundsätzlich die gleichen sind wie die in Fig. 22 und 23 veranschaulichten, die Durchströmungsgeschwindigkeit durch die Bodenfläche an jedem Punkt derselben von der Neigung der Fläche unabhängig ist. Die genannte Geschwindigkeit ist deshalb bei den Strömungsbildern von Fig. 22 bzw. 23 die gleiche wie bei den Strömungsbildern von Fig. 15 bzw. 18, bei denen die Bodenfläche horizontal ist.

Die Geschwindigkeit der Durchströmung durch die Bodenfläche kann auch durch Anstellung geeigneter Modellversuche auf experimentellem Wege bestimmt werden. Einen einfachen Versuch dieser Art hat der Verfasser unter Anwendung von Modell 2 ausgeführt. Dabei wurde das Modell bis 80 cm über dem Boden mit Bodenmaterial II (s. S.

64) gefüllt, worauf eine Modelldränleitung von 2 cm Durchmesser des auf S. 61 beschriebenen Typus mitten zwischen den Schmalseiten angebracht wurde. Nachdem die Erde bis über die Bodenfläche mit Wasser gefüllt und durch die Schaffung einer Druckdifferenz von 200 cm eine Strömung zwischen dieser und dem Inneren der Leitung zustande gebracht war, wurde durch eine Burette ein Tropfen Kaliumpermanganat unmittelbar unter der Bodenfläche an der Glaswand an den von der Leitung verschieden weit entfernten Stellen eingeführt, an denen die Geschwindigkeit gemessen werden sollte. Die Bewegung des Tropfens im Boden wurde durch die Glaswand beobachtet und die Zeit bestimmt, die von dem Augenblick, als der Tropfen in die Bodenfläche eingeführt wurde, bis zu dem Moment verfloss, als er eine mit der Fläche parallele und 4 cm von derselben gezogenen Linie passierte. Aus den dabei gemessenen Werten wurde, unter der Annahme, dass das Porenvolumen des Bodens 30 % betrage, die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in der beobachteten Strecke berechnet, worauf die Strömungsgeschwindigkeit in der Bodenfläche als mit ihr gleich angenommen wurde. Da die gemachten Annahmen nur annähernd richtig sind und da durch die Auflösung des Tropfens sich Beobachtungsschwierigkeiten einstellten, waren die erhaltenen Werte unsicher. Sie werden jedoch in Tabelle 4 wiedergegeben.

Tabelle 4.

Strömungsgeschwindigkeit in der Bodenfläche nach Versuch an Modell 2.

T cm	Geschwindigkeit in der Bodenfläche in cm/sek an Punkten, die in unten angegebener Entfernung von einem Punkt der Bodenfläche gerade oberhalb der Leitung gelegen sind						
	0 cm	5 cm	10 cm	20 cm	30 cm	40 cm	50 cm
20	0.078	0.070	0.069	0.046	0.032	0.028	0.017
40	0.036	0.028	0.028	0.026	0.026	0.018	0.014

Die Werte sind weiter in Form von Punkten in das Diagramm von Fig. 38 eingesetzt worden. Hier sind auch zum Zwecke des Vergleiches in Form einer Kurve die Werte von  $v_x$  eingezeichnet worden, die man auf theoretischem Wege auf Grundlage von (76) erhält. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung ziemlich gut.

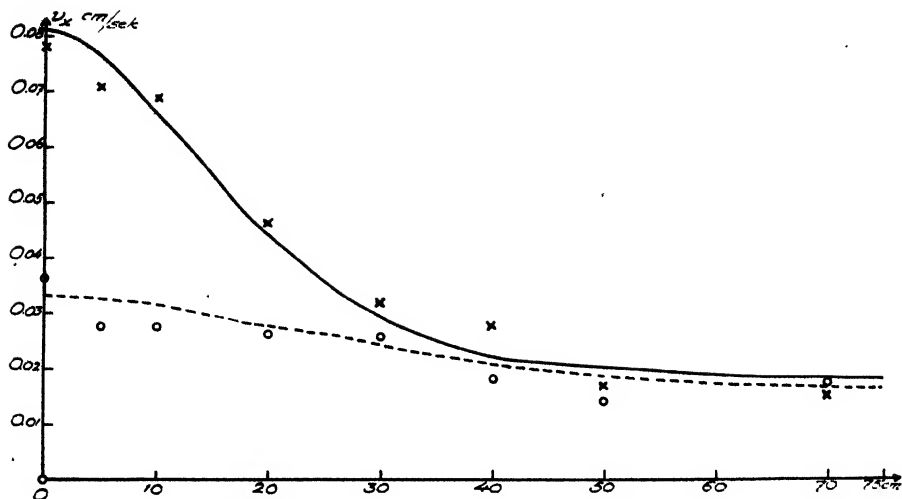


Fig. 38. Die Grösse der Strömungsgeschwindigkeit in verschiedenen Abständen von einer Leitung, wenn  $k = 1,36 \cdot 10^{-2}$  cm/sek,  $b = 150$  cm,  $c = 80$  cm,  $r = 2$  cm und  $h = 200$  cm sind. Kurve I und das Kreuz geben die Grösse nach den theoretischen Berechnungen bzw. nach den Resultaten der Modellversuche an, wenn  $T = 20$  cm ist. Kurve II und die eingeringelten Punkte geben die gleichen Faktoren an, für den Fall dass  $T = 40$  cm ist.

### B. Strömung in völlig wassergefülltem gedräntem Boden mit heterogener Durchlässigkeit.

Bei den oben durchgeführten Studien über die Grundwasserströmung in gedräntem ganz wassergefülltem Boden war die Voraussetzung, dass der Boden im Strömungsbereich in seiner ganzen Masse in Bezug auf Durchlässigkeit homogen sei. Wenn das der Fall ist, gilt als Grundgleichung für die Strömung die Laplacesche Gleichung (14), der Ausdruck, den wir unseren Studien zu Grunde gelegt haben.

Jedoch kann, wie auf S. 32 hervorgehoben wurde, homogene Durchlässigkeit unter natürlichen Bedingungen nur in gewissen Fällen vorausgesetzt werden. Oft ist vielmehr die Durchlässigkeit von Punkt zu Punkt der Bodenmasse stark verschieden. Unter solchen Umständen gilt für die Bewegung nicht die Laplacesche Gleichung, sondern nur (12).

*Kontinuierliche Änderung der Durchlässigkeit mit dem Orte.* Die Durchlässigkeit kann sich von Punkt zu Punkt der Bodenmasse kontinuierlich oder sprungweise ändern. Geschieht die Änderung kontinuierlich, so tritt der Durchlässigkeitskoeffizient  $\alpha$  als eine kontinuierliche Funktion des Ortes ( $x, y, z$ ) auf. Wenn wir diese

Funktion in (12) einsetzen und darauf die sich ergebende Differentialgleichung nach den bestehenden Grenzbedingungen auflösen wollten, würden wir, theoretisch betrachtet, auch hier die bei der Dränung des Bodens vorkommenden Strömungsbilder erhalten können. Indessen stösst man bei der Durchführung einer solchen Lösung auf beträchtliche mathematische Schwierigkeiten, weshalb der Weg nicht gangbar erscheint. Das ist auch bei Behandlung anderer Strömungen in einem Boden von heterogener Durchlässigkeit der Fall, ausser in gewissen einfachen Spezialfällen (s. DACHLER 1936 und MUSKAT 1937). Eine analytische Behandlung unseres Problems ist also nicht durchführbar. Dagegen können wir dasselbe mit Hilfe von Modellversuchen angehen. Diese können in Erde angestellt werden, wobei man die Durchlässigkeit im Modelle mit dem Orte in der gleichen Weise wechseln lässt wie in der Wirklichkeit. Ebenso können elektrische Modellversuche vorgenommen werden, wobei das Leitungsvermögen des Modells nach der gleichen Regel wechselt.

Indessen sind die Bedingungen in gedräntem Boden im allgemeinen nicht von der Art, dass für die kontinuierliche Variation der Durchlässigkeit mit dem Orte generelle Regeln aufgestellt werden können. Eine für einen bestimmten Spezialfall durchgeführte Lösung hat deshalb kaum einen Wert über den betreffenden Spezialfall hinaus. Deshalb soll eine derartige Lösung in diesem Zusammenhang nicht angestrebt werden.

*Sprungweise Änderung der Durchlässigkeit mit dem Orte.* Auch sprungweise Veränderungen der Durchlässigkeit des Bodens können, wie erwähnt, vorkommen, wobei die Bodenmasse zwischen den Stellen der »Sprünge« nach ihrer Durchlässigkeit entweder homogen oder heterogen sein kann. Im ersten Fall haben wir gewisse Möglichkeiten, die bei der Dränung des Bodens sich ergebenden Strömungsbilder auf analytischem Wege zu erhalten, weil die Laplacesche Gleichung für jedes Teilgebiet gilt. Zur Erhaltung der Lösung müssen indessen ausserordentlich zeitraubende Rechnungen durchgeführt werden. Leichter ist es, das Strömungsbild durch Anstellung von Modellversuchen zu erhalten. Diese können entweder an Erdmodellen ausgeführt werden, wobei im Modelle zwischen den  $\kappa$ -Werten der verschiedenen Strömungsbereiche dieselbe Relation bestehen muss wie in der Wirklichkeit, oder an dem elektrischen Modelle, wobei die gleiche Regel für das Leitungsvermögen zu gelten hat.

In gedräntem Boden kommen oft Veränderungen vor, die man als sprungweise bezeichnen könnte. So treten in sedimentierten Bodenarten oft scharf voneinander getrennte Horizontallager auf, die be-



trächtlich verschiedene Durchlässigkeiten aufweisen. Das Strömungsbild in einem solchen gedränten Boden wird davon stark beeinflusst werden, verschieden in verschiedenen Fällen, je nach der Lage, Mächtigkeit und den Durchlässigkeitsbedingungen der verschiedenen Lager. Der Verfasser hat auf Grund von Modellversuchen einen einzigen derartigen Fall studiert, wobei die Absicht die war, die Einwirkung zu erforschen, die ein dünnes, horizontal unter dem Niveau des Drän-systems gelegenes Bodenlager auf das Strömungsbild in einem Boden hat, wenn die Durchlässigkeit des Lagers im Verhältnis zur sonstigen Durchlässigkeit des Bodens gross ist. Vom dem untersuchten Strömungsbild wurde angenommen, dass es unter folgenden Bedingungen entstehe: Ein Boden habe horizontale Fläche und grosse Ausdehnung nach der Seite hin. Der Boden bestehe, von oben gerechnet, zuerst aus einem Lager *A* mit dem Durchlässigkeitskoeffizienten  $\kappa_1$ , dann aus einem Lager *B* mit dem bedeutend grösseren Durchlässigkeitskoeffizienten  $\kappa_2$ , weiter aus einem Lager *C* mit der gleichen Durchlässigkeit wie *A*, und schliesslich unten aus einem undurchlässigen Lager *D*. Die Lager *A*, *B*, und *C* seien *f*, *g* und *h* cm mächtig. Dieser Boden, in dem eine Primärströmung nicht vorausgesetzt wird, sei mit vielen untereinander parallelen Dränleitungen von dem Halbmesser *R* cm gedränt. Die Dräntiefe, von der Bodenfläche bis zu den Achsen der Leitungen gerechnet, sei *a* cm, der Dränabstand *b* cm, und weiter sei vorausgesetzt, dass die Leitungen eine untereinander gleich grosse Wassermenge führen. Die eben angegebenen Grössen stünden, so sei angenommen, in folgender Relation zu einander:

$$\kappa_1 : \kappa_2 = 1 : 45; a : b : R : f : g : h = 1.00 : 5.20 : 0.20 : 1.65 : 0.15 : 3.90.$$

Mit Hilfe von Material II und V, zwischen denen nach der Tabelle von S. 65 die Durchlässigkeitsrelation 1:45 ist und unter Beobachtung der angegebenen Relationen der Längenmasse wurde der Versuch an Modell 2 durchgeführt, wobei eine Dränleitung mitten zwischen den Schmalseiten des Modells eingelegt wurde. Der Versuch ist in Fig. 39 wiedergegeben. Wie man sieht, geht die äusserste der photographierten Stromlinien, die ganz rechts auf dem Bilde zu sehen ist, zunächst beinahe lotrecht durch das Lager *A*, worauf sie dem Lager *B* in der Richtung gegen die Leitung folgt. Sie geht darauf etwas in das Lager *C* hinab, worauf sie wiederum in *D* hinauf geht und darauf durch *A* in die Leitung. Die — von aussen gezählt — nächste beobachtete Stromlinie die sich ganz links auf dem Bild befindet, verläuft auf die gleiche Weise, geht aber nicht bis in das Lager *C* hinunter. Auf ihrem Wege von dem Lager *B* zur Leitung ist die Stromlinie weiter deutlich

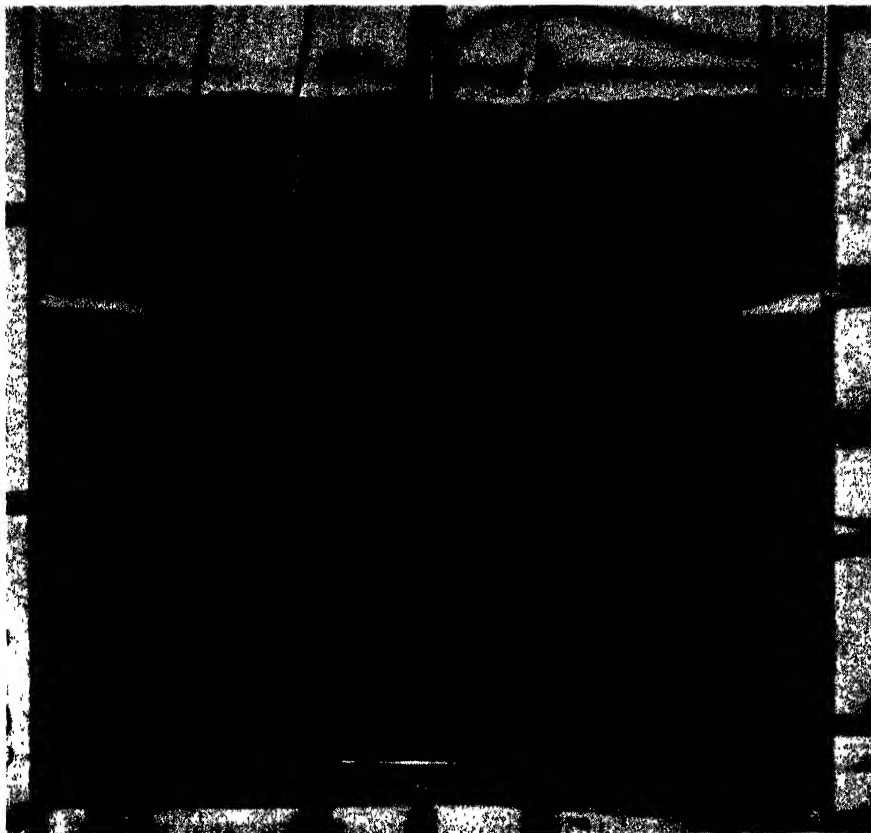
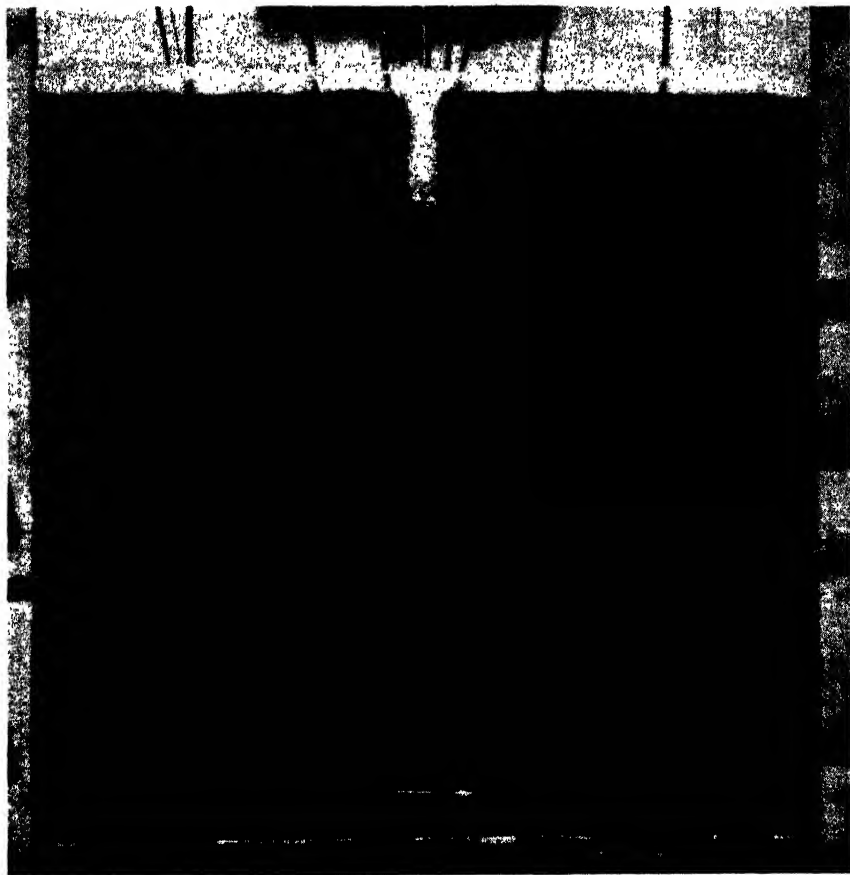


Fig. 39. An Modell 2 ausgeführter Modellversuch, die Einwirkung zeigend, die ein horizontales, unter dem Niveau der Leitungen gelegenes Bodenlager, von grösserer Durchlässigkeit als der übrige Boden auf das Strömungsbild ausübt.

nach oben konvex. Zusammenfassend kann über die Einwirkung des Lagers *B* auf die Strömung gesagt werden, dass dasselbe auf die Bewegung des Wassers *nach unten hin abgrenzend* wirkt. Je grössere Durchlässigkeit *D* im Verhältnis zu *A* und *C* besitzt, umso kleiner ist die Wassermenge, die bei der Strömung durch *C* hindurchgehen wird.

Eine zweite Form von sprungweisen Veränderungen der Durchlässigkeit kann in Tonböden vorkommen, wenn infolge Bearbeitung bei gewissen Teilen der Bodenmasse die Durchlässigkeitsbedingungen verändert sind. So haben, wie FLODKVIST (1931, 1935) zuerst gezeigt hat und wie die Untersuchungen des Verfassers bestätigt haben (s. S. 133),

die bearbeitete obere Schicht eines kultivierten Tonbodens und der über den Leitungen gelegene Teil der Bodenmasse, der bei der Niederlegung derselben umgegraben wurde, eine um ein Beträchtliches grössere Durchlässigkeit als der übrige in natürlicher Lagerung liegende Teil des Bodens. Dies hat zur Folge, wie FLODKVIST (1931) hervor gehoben hat, dass das Grundwasser des Bodens bei seinem Weg von der Bodenfläche zu den Leitungen in erster Linie längs der Ackerkrume zu dem über den Leitungen liegenden umgegrabenen Boden gehen und dann durch diesen hinunterströmen wird, während der übrige Boden weniger Grundwasser führt. Der Verfasser hat mittels eines Modellversuches diese Strömung studiert, wobei die Annahme galt, dass das Strömungsbild unter folgenden Bedingungen entstanden sei. Eine Bodenmasse mit horizontaler Fläche und grosser Ausdehnung nach der Seite hin sei nach unten hin in der Tiefe  $c$  unter der Bodenfläche von einem undurchlässigen Lager begrenzt. Die Bodenmasse, in der das Vorkommen einer Primärströmung nicht vorausgesetzt ist, sei mit vielen untereinander parallelen Dränleitungen von  $R$  cm Durchmesser gedrängt. Die Dräntiefe, von der Bodenfläche zu den Achsen der Leitungen gerechnet, sei  $a$  cm, der Dränabstand  $b$  cm, und weiter wird vorausgesetzt, dass die Leitungen untereinander gleich grosse Wassermengen führen. Die Bodenmasse habe in ihrem unberührten Zustand den Durchlässigkeitskoeffizienten  $\kappa_1$ , während ihr oberstes bei der Bearbeitung durcheinandergebrachtes Lager bis zu einer Tiefe von  $p$  cm unter der Bodenfläche den Durchlässigkeitskoeffizienten  $\kappa_2$  habe. Der Durchlässigkeitskoeffizient  $\kappa_2$  liege ebenfalls bei dem Boden vor, der direkt über den Leitungen liegt und der bei der Einlegung derselben umgegraben wurde. Die eben angegebenen Grössen stünden, so sei angenommen, zueinander in folgender Beziehung:  $\kappa_1 : \kappa_2 = 1 : 45$ ;  $a : b : R : p = 1.00 : 5.20 : 0.20 : 0.25$ . Mit Hilfe von Material II und V, zwischen denen nach Tabelle von S. 65 die Durchlässigkeitsrelation  $1 : 45$  ist, und unter Beachtung der angegebenen Längenmassrelationen, wurde der Versuch an Modell 2 durchgeführt, indem eine Modelldränleitung gerade zwischen den Schmalseiten des Modells eingelegt wurde. Der Verlauf der Strömung wurde anfangs durch Einführung von Färbemitteln an verschiedenen Punkten der Bodenfläche untersucht. Dabei zeigte es sich, dass alles Wasser, das durch die Bodenfläche in einem geringeren Abstand von der Leitung als ungefähr  $4/10 \cdot b$  hindurchgeht, die Leitung erreichte, ohne mit der schwerer durchlässigen Bodenmasse in Berührung zu kommen, sondern indem es nur die leichter durchlässige unmittelbar unter der Bodenfläche und direkt über der Leitung liegende Bodenmasse passierte.



*Fig. 40.* An Modell 2 ausgeführter Modellversuch zur Untersuchung des Strömungsverlaufes in einem Boden, in dem die Ackerkrume und der umgegrabene Boden direkt oberhalb der Leitungen grössere Durchlässigkeit hat als der unumgegrabene Boden. Das Bild zeigt den Strömungsverlauf in dem unumgegrabenen Boden, wenn die Bodenmasse ganz wassergefüllt ist.

Der unvergleichlich grössere Teil der dahinströmenden Wassermenge nahm diesen Strömungsweg. Das Wasser dagegen, das durch die Bodenfläche in grösserem Abstand von der Leitung als dem angegebenen hindurchging, erreichte die Leitung erst, nachdem es einen Teil der schwerer durchlässigen Bodenmasse passiert hatte. Es wurde dabei konstatiert, dass der Einfluss in die schwerer durchlässige Bodenmasse längs ihrer *ganzen* Grenzfläche gegen die leichter durchlässige Bodenmasse, also auch längs der lotrechten Teile der genannten Fläche,

erfolgte. Die Ausströmung aus der schwerer durchlässigen Bodenmasse geschah nur nahe an der Leitung. Als ein zweites Moment des Versuches wurde der Stromlinienverlauf in der schwerer durchlässigen Bodenmasse untersucht. Dies geschah, indem mittels Burettenspitzen an verschiedenen Stellen der Grenzfläche zwischen der Masse und der leichter durchlässigen Bodenmasse Färbemittel eingeführt wurden. Der Versuch ist in Fig. 40 wiedergegeben. Wie man sieht, bestätigt der Versuch das, was eben über den Einfluss in die lotrechten Teile der Grenzfläche gesagt wurde. Aus dem ausgeführten Versuch können folgende allgemeine Folgerungen gezogen werden. Ist die Bodenfläche horizontal und der Boden völlig wassergefüllt und sind die Durchlässigkeitsverhältnisse die von FLODKVIST (1931) für Tonboden angegebenen, so wird der schwerer durchlässige Teil der Bodenmasse nur von dem Wasser passiert werden, das durch die von den Leitungen am entferntesten gelegenen Teilen der Bodenfläche eingeströmt ist. Der Einfluss in den schwerer durchlässigen Teil der Bodenmasse erfolgt längs der ganzen Grenzfläche zwischen diesem und dem leichter durchlässigen Teil der Bodenmasse.

## 2. Strömung in teilweise wassergefülltem gedräntem Boden.

### A. Einleitung. Ältere Untersuchungen.

Die im Obigen behandelten Fragen haben sich auf die Strömung in völlig wassergefülltem Boden und die damit zusammenhängenden Tatsachen bezogen. Wie einleitungsweise hervorgehoben wurde, ist die Voraussetzung, dass ein gedränter Boden bis zur Bodenoberfläche wassergefüllt ist, nur während kurzer Perioden bei und nach grossen Niederschlägen und bei Schneeschmelze gegeben. In den Zwischenzeiten ist der Boden nur teilweise wassergefüllt, und ist das Bodengelager durchlässig, so sammelt sich das freie Wasser in den unteren Teilen des Lagers, wo sämtliche Poren ausgefüllt werden. Es bildet sich eine *grundwasserführende Zone* heraus. Diese Zone wird nach oben hin von dem *Grundwasserspiegel* begrenzt, der dadurch charakterisiert ist, dass der Druck in ihm mit dem atmosphärischen Drucke gleich ist. Aus der Grundwasserzone wird durch den Kapillardruck eine gewisse Menge Wasser über den Grundwasserspiegel emporgehoben, wobei sich eine *Kapillarzone* ausbildet, die dadurch charakterisiert ist, dass der Druck in ihr geringer ist als der atmosphärische. Die Kapillarzone erstreckt sich soweit nach oben, als der Boden ganz wassergefüllt ist. Über ihr kommt dann eine nur teilweise wassergefüllte Zone.

Die Strömung des Wassers in teilweise wassergefülltem gedräntem Boden hat das Interesse der älteren Forschung in stärkerem Grade auf sich gezogen als die Strömung in völlig wassergefülltem Boden. Besonders stark hat — seitdem die Methode der Bodenentwässerung mittels gedeckter Leitungen allgemeiner zur Anwendung kam — die Einwirkung der Leitungen auf die Lage des Grundwasserspiegels im Boden interessiert. Das dürfte damit zusammenhängen, dass die Hauptaufgabe der Dränung darin gesehen wurde, die Lage des genannten Spiegels auf ein für die Kulturpflanzen vorteilhaftes Niveau zu senken.

Die erste Untersuchung über die Lage des Grundwasserspiegels in gedräntem Boden scheint 1845 von CLUTTERBUCK ausgeführt worden zu sein. Dieser wies durch Grundwasserstandsmessungen nach, dass die Wasserfläche zwischen zwei Dränleitungen eine gekrümmte Form annimmt. Er fand, dass der niederste Punkt der Fläche gerade oberhalb der Leitungen ein Stück über ihrem oberen Rande gelegen sei, ihr höchster Punkt gerade in der Mitte zwischen den Leitungen. Aus der Untersuchung ergab sich weiter, dass, je grösser die Niederschlagsmenge war, um so höher die Wasserfläche gelegen und um so grösser ihre Krümmung war. Clutterbuck hat nicht versucht, einen Ausdruck für die Form der Fläche zu erhalten. Zu den gleichen Ergebnissen wie Clutterbuck kam durch seine 1857/58 ausgeführten Untersuchungen Delacroix (HANNEMANN 1870). Delacroix arbeitete auch eine Methode für die Berechnung des vorteilhaftesten Verhältnisses zwischen Dräntiefe und Dränabstand aus, sah aber dabei von seinen eigenen Beobachtungsergebnissen ab und nahm an, dass der Grundwasserspiegel zwischen zwei Dränleitungen die Form zweier einander schneidenden Ebenen habe. Clutterbucks und Delacroix' Untersuchungen wurden im Jahre 1870 von HANNEMANN zur Diskussion aufgenommen, der auf Grundlage der Ergebnisse der genannten Forscher annahm, dass der Wasserspiegel zwischen zwei Dränleitungen der Fläche eines Kreiszylinders entspreche, wobei die Achse des Zylinders mitten zwischen den Leitungen und unter deren Niveau gelegen sei. Hannemann wies auch die Unzuverlässigkeit der obenerwähnten Berechnungsmethode von Delacroix nach.

Im Jahre 1872 wurde die Frage nach der Form des Grundwasserspiegels zwischen zwei Dränleitungen aufs neue von einem dänischen Forscher, COLDING, aufgenommen. Colding hatte, wie oben (S. 15) erwähnt, auf Grund ausgeführter Versuche die Schlussfolgerung gezogen, dass die Strömungsgeschwindigkeit des durch einen Vertikalschnitt des Bodens hindurchgehenden Grundwassers mit der Neigung



Fig. 41. Zufluss zu Dränleitungen nach Colding und Rothe.

gegen die Horizontalebene proportional sei, die der Wasserspiegel in seiner Schnittlinie mit dem Vertikalschnitt habe. Von dieser Folgerung ausgehend, die, wie oben (S. 14) hervorgehoben wurde, mit Darcys Satz näher übereinstimmt, wenn der Grundwasserspiegel eine schwache Neigung hat, machte Colding eine Schlussfolgerung nach folgenden

Richtlinien. Wir betrachten die Sachlage zwischen zwei Dränleitungen. Durch die Bodenoberfläche sinkt infolge der Niederschläge per Zeit- und Flächeneinheit die Wassermenge  $q$  nieder und bildet oberhalb einer horizontalen undurchlässigen Unterlage das Grundwasser. Wir legen nun in die Bodenmasse ein Koordinatensystem, dessen  $x$ -Achse längs des undurchlässigen Lagers normal auf die Leitungen und dessen  $y$ -Achse gerade zwischen ihnen und normal auf sie verläuft (Fig. 41), und betrachten die Strömung des Grundwassers in der  $xy$ -Ebene. Wenn die Leitungen gleich grosse Wassermengen führen, so folgt zunächst aus Symmetriegründen, dass durch die auf die  $xy$ -Ebene normale Vertikalebene, in der die  $y$ -Achse gelegen ist, keine Strömung erfolgt und dass die Wasserfläche längs der Schnittlinie mit dieser Ebene horizontal ist, d. h. dass  $dy/dx$  längs der Fläche hier  $= 0$  ist. Begeben wir uns darauf auf eine andere, auf die  $xy$ -Ebene normale Vertikalebene, die rechts von der  $y$ -Achse im Abstände  $x$  von derselben gelegen ist, so gilt hier, wenn Coldings obenerwähnte Folgerung richtig ist, der Satz, dass das Wasser diese Ebene mit der Geschwindigkeit  $k \cdot dy/dx$  passiert, wobei  $dy/dx$  die Neigung des Grundwasserspiegels zur Ebene ist. Die Wassermenge, die einen lotrechten Streifen der Ebene von der Breite 1 passiert, können wir, wenn die Höhenlage des Wasserspiegels über dem undurchlässigen Lager  $y$  ist, mit dem Ausdruck  $-y \cdot k \cdot dy/dx$  schreiben. Diese Mengen können wir auch  $qx$  schreiben und wir erhalten

$$qx = -y \cdot k \cdot dy/dx,$$

was nach Integrierung uns

$$qx^2 + ky^2 = C$$

als Gleichung des Grundwasserspiegels ergibt. Nach Colding wäre also der Grundwasserspiegel zwischen zwei Dränleitungen eine Zylinder-

fläche von ellipsenförmigem Querschnitt. Colding verglich seine Theorie mit den obenerwähnten experimentellen Daten von Delacroix und glaubte dabei gute Übereinstimmung finden zu können. Gegen die Theorie muss jedoch dieselbe Einwendung gemacht werden wie gegen Dupuits Brunnentheorie, nämlich dass die gemachte Voraussetzung, die Strömungsgeschwindigkeit durch einen Vertikalschnitt der durchströmten Bodenmasse sei im ganzen Schnitte konstant und zu der Neigung des Grundwasserspiegels proportional, unrichtig ist.

Der nächste Forscher, der auf die Frage nach der Lage des Grundwasserspiegels im gedrännten Boden zu sprechen kam, war MERL (1890). Dies geschah im Zusammenhang damit, dass Merl die Frage der Längen- oder Querdränung zur Behandlung aufnahm. Dieses Problem war früher von verschiedenen Autoren erörtert worden. So hatte Elkingtons Schüler JOHNSTONE schon 1799 die Anwendung der Querdränung vor der Längendränung empfohlen und als Grund dafür u. a. angegeben, dass die Sammelstränge bei der Längendränung in gewissem Grade Gefahr liefen, infolge des rascheren Zuflusses aus den Zweigleitungen gesprengt zu werden. Johnstone verwies weiter auf lateinische Schriftsteller, nach denen die Römer nicht allein die Methode der Bodenentwässerung durch gedeckte Leitungen gekannt, sondern auch den Vorteil eingesehen hätten, »die Leitungen quer über den Abhang eines Feldes zu ziehen. Ein Punkt, worin die Neueren oft fehlen.« Trotz dieser und anderer Aussprüche zugunsten der Querdränung blieb jedoch die Längendränung während des ganzen 19. Jahrhunderts bis zur Zeit des Auftretens Merls vorherrschend. Dazu hat nach der Ansicht Merls viel beigetragen, dass der belgische Ingenieur LECLERC, der in England, dem Ursprungslande der Dräntechnik, diese studiert hatte und dessen in verschiedenen Handbüchern (z. B. LECLERC 1860) vorgelegte Aussprüche als auktoritativ angesehen wurden, die Längendränung empfahl.

Merl ging davon aus, dass jede Leitungsfuge über sich ein Bodenvolumen entwässere, so dass der Grundwasserspiegel ringsum die Fuge ein trichterähnliches Aussehen bekomme. Merl, der u. a. DUPUITS (1865) und THIEMS (1870) Theorien kannte, nahm an, dass, wenn durch die Fuge ein Vertikalschnitt gelegt werde, die beiden Schnittlinien zwischen dem Schnitt und dem Grundwasserspiegel sich als nach oben konvex herausstellen würden. Er setzte jedoch voraus, dass die Linien nur eine schwache Krümmung hätten, und bezeichnete sie deshalb als annähernd gerade Linien. Der von einer Fuge entwässerte Bodenteil konnte daher nach Merl annähernd als kegelförmig angesehen werden (Fig. 42 a). Die Grundfläche dieses Ke-



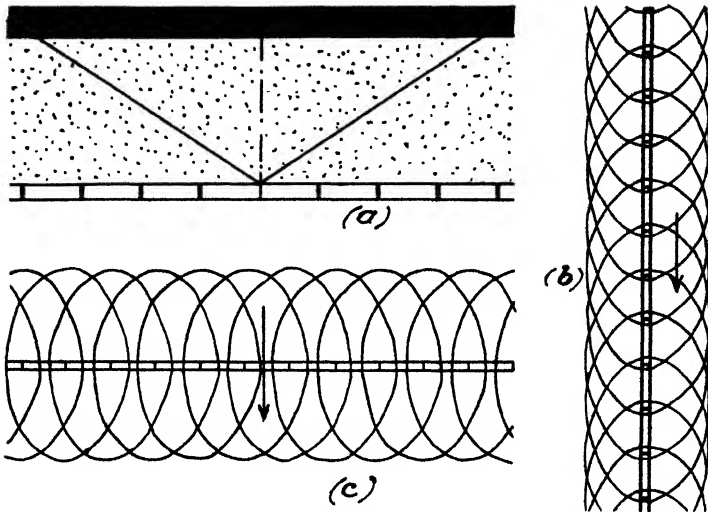


Fig. 42. Zufluss zu einer Dränleitung nach Merl.

gels, die zugleich ein Teil der Bodenoberfläche ist, sollte, wenn der Boden eben ist, die Form eines Kreises und, wenn der Boden geneigt ist, die Form einer Ellipse haben. Wird nun in einen Boden mit geneigter Fläche eine Leitung in der Richtung des Gefälles gelegt, so werden die von den einzelnen Fugen entwässerten ellipsenförmigen Teile der Bodenfläche so zueinander liegen, wie Figur 42 b zeigt, während, wenn die Leitung normal auf das Gefälle gelegt wird, die Lage so ist, wie Fig. 42 c angibt. Im letzteren Falle wird, wenn die Theorie richtig ist, von der Leitung ein grösserer Teil der Bodenfläche entwässert als im ersten Fall, und aus diesem Grund empfiehlt Merl Querdränung. Gegen die Theorie können indessen, wie leicht einzusehen ist, mehrere Einwände erhoben werden. Sie hat jedoch stark dazu beigetragen, dass man um die Jahrhundertwende immer mehr von der Längendränung zur Querdränung überzugehen begann, und die letztere dann die vorherrschende Methode wurde.

Unmittelbar nach Merl trat auch GERHARDT (1891) als Fürsprecher für den Übergang von der Längendränung zur Querdränung auf, wobei er als hauptsächliches Motiv die gleiche Theorie anführt wie Merl. Im Zusammenhang mit seinen Diskussionen weist Gerhardt darauf hin, dass »wie jedem erfahrenen Dräntechniker sehr wohl bekannt ist«, das Wasser zu einer Dränleitung nicht allein von den Seiten hinströmt, sondern auch von unten. »Der Wassertropfen, welcher sich im Boden unmittelbar unter einer Drainfuge befindet, kann nicht nach unten in das Grundwasser, sondern nur nach oben in den Drain ent-

weichen. Die Nachbartropfen folgen, die Bewegung setzt sich weiter fort, und es entsteht für den Weg des Tropfens nach dem Drain eine Linie, die anfänglich senkrecht in den Boden verläuft und dann in gekrümmter Richtung nach dem Drain sich wendet.« Während frühere Autoren sich nur für das Aussehen des Grundwasserspiegels in dem gedrännten Boden interessiert hatten, ist Gerhardt mit diesen Worten der erste, der zu dem genaueren Verlauf der Wasserbewegung Stellung nimmt.

Eine andere Theorie über die Form des Grundwasserspiegels zwischen zwei Dränleitungen wurde 1911 von SPÖTTLE aufgestellt, der folgenden Gedankengang durchführte. In einen Boden, in dem bis zu einem gewissen Niveau ein ursprünglich still stehendes Grundwasser sich vorfindet ( $FEA$  in Fig. 43), wird eine horizontale Dränleitung eingelegt, die das Wasser ableiten kann. Ein kleines Wasservolumen, das in der Wasserfläche in einem Punkte  $F$  gerade über der Leitung gelegen ist, wird nun infolge seiner Schwere sich mit der Durchströmungsgeschwindigkeit  $v$  lotrecht gegen die Leitung hin bewegen und ist nach einer Zeiteinheit im Punkte  $H$ . Ein zweites kleines Wasservolumen der Fläche im Punkte  $A$  bewegt sich auch seinerseits infolge seiner Schwere gegen die Leitung hin und ist nach einer Zeiteinheit in  $C$ , wobei  $AC = v \cdot \sin \alpha$  ist. Wir legen nun ein Koordinatensystem, dessen Mittelpunkt in die Mitte der Leitung zu liegen kommt und dessen Achsen so gehen, wie Fig. 43 zeigt, und wenden die gemachte Überlegung auf einen willkürlich gewählten Punkt der Fläche an. Die  $y$ -Koordinate des Punktes muss, wenn die eben erwähnte Überlegung richtig ist, nach einer Zeiteinheit

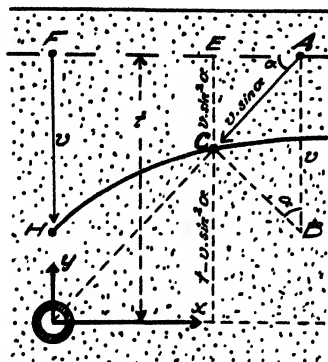


Fig. 43. Zufluss zu einer Dränleitung nach Spöttle.

$$y = t - v \sin^2 \alpha$$

sein und, da

$$\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ist, so erhalten wir

$$x = y \sqrt{\frac{y - t + v}{t - y}}$$

als Ausdruck für die Lage der Fläche in der  $xy$ -Ebene nach der Zeiteinheit. Diese Lage wird durch die vollgezogene Linie der Fig. 43 veranschaulicht. Spöttles Theorie, gegen die mehrere Einwendungen erhoben werden können, z. B. die, dass das Wasser keineswegs, wie angenommen, sich geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit bewege, zog in der ersten Zeit nach ihrer Aufstellung ein gewisses Interesse auf sich. So hat KRÜGER (1911) sie weiter entwickelt und auf ihr aufgebaut.

Unter den Forschern, die sich später mit dem Problem der Lage des Grundwasserspiegels in gedräntem Boden beschäftigt haben, sind ROTHE (1924, 1930) und KOZENY (1927, 1932) zu nennen. Rothe stellte eine Überlegung gleich der früher von Colding ausgeführten an und kam unabhängig von diesem zu dem gleichen Resultat, dass der Wasserspiegel zwischen zwei Dränleitungen die Form einer Zylinderfläche mit ellipsenförmigem Querschnitt annehme. Das gleiche Resultat erreichte KOZENY (1927) auf deduktivem Wege, wobei vorausgesetzt wurde, dass infolge eines undurchlässigen Lagers unter dem Niveau der Leitungen keine Wasserbewegung unter dem Niveau der Leitungen vorkomme.

Die jetzt erwähnten Theorien über die Bewegung des Wassers in gedräntem teilweise wassergefülltem Boden sind gegen Einwände nicht gesichert und können deshalb einem weiteren Studium des Strömungsverlaufes nicht zu Grunde gelegt werden. Vielmehr scheint ein solches Studium auf den in Kap. II abgeleiteten Grundgleichungen für die Wasserbewegung aufgebaut werden zu müssen. Der Verfasser hat versucht, auf diesem Wege zu gewissen Ergebnissen zu kommen, die im Folgenden vorgelegt werden.

## **B. Theoretische Behandlung.**

### **a. Allgemeine Grundlagen.**

Wenn wir die Wasserbewegung in einer teilweise wassergefüllten gedränten Bodenmasse behandeln wollen, können wir die Verhältnisse teils in der Grundwasser führenden Zone und in der Kapillarzzone betrachten, wo sämtliche Poren mit Wasser gefüllt sind, teils auch oberhalb der Kapillarzzone, wo die Poren nur teilweise mit Wasser gefüllt sind. Eine Wasserbewegung kann in beiden Bereichen vor sich gehen. Eine von Dränleitungen direkt bedingte Wasserbewegung kommt jedoch nur in dem unteren Bereiche vor, während die Bewegung in dem oberen nur indirekt von den Leitungen berührt wird.

Da die Bodenmasse in der Grundwasserzone und in der Kapillarzone ganz mit Wasser gefüllt ist, muss für die Strömung in ihnen die auf Darcys Satz gegründete Grundgleichung (12) gelten. Den Verlauf der Strömung in einem bestimmten Fall muss man folglich durch Lösung der genannten Gleichung unter Berücksichtigung u. a. der Verhältnisse an den Grenzen des Strömungsbereiches erhalten können. Indessen ergeben sich hier Schwierigkeiten, weil die obere Grenzfläche des Strömungsgebietes, d. h. die obere Grenzfläche der Kapillarzone, nicht fixiert ist, sondern von dem Verlauf der Strömung und der Kapillarität abhängt. Unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen zeigen sich jedoch Wege, auf denen man weiterkommen kann.

Wir setzen also voraus, dass eine Bodenmasse nach ihrer Durchlässigkeit homogen sei, und weiter, dass eine in ihr vor sich gehende Wasserbewegung zweidimensional sei. Weiter nehmen wir an, dass die Bewegung stationär, d. h. von der Zeit unabhängig sei. Schliesslich setzen wir voraus, dass die kapilläre Steigung im Boden sehr klein sei, so dass die obere Grenzfläche des Strömungsbereiches annähernd mit dem Grundwasserspiegel gleichgesetzt werden kann. Unter diesen Umständen sind wir in gewissem Ausmasse imstande, Lösungen für die Grundgleichung zu finden, die nun die in (21) angegebene Form annimmt. Wir schlagen hiermit einen Weg ein, der, zuerst von HELMHOLTZ (1868) und KIRCHHOFF (1869) gewiesen, schon in verschiedenen Gebieten der Hydrodynamik begangen wurde, in erster Linie bei Behandlung freier Ausströmung durch Öffnungen [BETZ & PETERSON (1931), KAUFMANN (1931)], aber auch bei Behandlung der Grundwasserströmungsprobleme [HAMEL (1934), DACHLER (1936) und BREITENÖDER (1942)]. Die Methode besagt kurz das Folgende.

Als wir in einem früheren Zusammenhange zeigten, dass jede analytische Funktion eine Integralfunktion von (21) sei, schrieben wir u. a. den Ausdruck an, der in Kap. II als (23) zu finden ist. Der Ausdruck ergibt uns, wenn die Teilausdrücke in den Klammern des rechten Gliedes gleich sind,

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = i \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (80)$$

oder, weil  $d\varphi/dx = -v_x$  und  $d\psi/dx = v_y$  ist,

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = -v_x + i v_y = -v. \quad (81)$$

Durch Differenzierung von  $\omega$  nach  $z$  erhalten wir also eine neue analytische Funktion  $v$ , und wir sind, wenn wir eine Schar orthogonaler Trajektorien haben,  $\varphi = \text{konst.}$   $\psi = \text{konst.}$ , die in einer  $z$ -Ebene mit den Achsen  $x$  und  $y$  eingezeichnet ist, imstande, dieselbe auf einer  $v$ -Ebene, die die Achsen  $v_x$  und  $v_y$  hat, konform abzubilden. Entspricht nun unser Bild in der  $z$ -Ebene einem Grundwasserströmungsbild, so wird, wie leicht einzusehen ist, das Bild in der  $v$ -Ebene ein gespiegelten »Geschwindigkeitsbild« darstellen oder einen Hodographen des Grundwasserströmungsbildes. Wir nehmen nun an, dass ein Strömungsbild sich in einem Bereiche  $P_z$ , dessen Grenzen uns unbekannt sind, vorfinde. Wir setzen indessen voraus, dass wir die Grösse der Geschwindigkeit und ihre Richtung längs der Grenzen kennen. Damit sind wir imstande, die Grenzen von  $P_z$  in einer Hodographenebene abzubilden, in der als Abbildung ein neuer Bereich,  $P_v$ , entsteht. Für diesen neuen Bereich  $P_v$  sind die Grenzbedingungen fest, und wir können hier eine konforme Abbildung unseres gesuchten Strömungsbildes einzeichnen, nachdem wir die Abbildungsfunktion

$$\omega = f(v) \quad (82)$$

gefunden haben. Führen wir hierauf die Rechnung durch

$$\int dz = \int -\frac{d\omega}{v} = z, \quad (83)$$

so erhalten wir schliesslich

$$\omega = f(z) \quad (84)$$

und können so unser gesuchtes Strömungsbild in der Strömungsebene zeichnen.

Dies ist das Grundprinzip der Helmholtz-Kirchhoffschen Methode. Wieweit wir dieselbe für unsere aktuellen Probleme anwenden können, hängt davon ab, inwieweit wir imstande sind, die Variation der Geschwindigkeit längs der Grenzen des Strömungsbereiches nach Richtung und Grösse anzugeben. Dies kann, wie wir später sehen werden, in gewissen Fällen geschehen, in anderen nicht.

Die Grenzen eines Strömungsbereiches können von verschiedener Art sein. So haben wir zunächst *undurchlässige Lager und Wände*. Hier gilt der Satz, dass eine Bewegung nur längs der begrenzenden Fläche vorkommen kann. Bildet diese in einem gewissen Punkte mit der  $x$ -Achse der Strömungsebene den Winkel  $\alpha$ , so können wir die Geschwindigkeit in dem Punkte mit

$$v_x \cdot 1/\cos \alpha \text{ oder } v_y \cdot 1/\sin \alpha \quad (85)$$

angeben. Ist die Wand eben, so ist  $\alpha$  längs derselben konstant, und der Wand entspricht dann in der Hodographenebene *eine gerade Linie*.

Haben wir jedoch eine *freie Wassermasse, mit der der Boden in Kontakt steht*, so gilt der Satz, dass die Grenzfläche Boden-Wasser eine Potentialfläche ist, weshalb die Geschwindigkeitskomponente längs derselben 0 ist. Bildet die Fläche in einem bestimmten Punkte mit der  $x$ -Achse der  $z$ -Ebene den Winkel  $\alpha$ , so können wir für die Geschwindigkeit in diesem Punkte schreiben

$$v_x \cdot 1/\sin \alpha \text{ oder } v_y \cdot 1/\cos \alpha. \quad (86)$$

Ist die Grenzfläche eben, so ist  $\alpha$  längs derselben konstant und der Fläche wird dann auf der Hodographenebene *eine gerade Linie* entsprechen.

Haben wir schliesslich drittens einen *freien Grundwasserspiegel*, so gilt für diesen, wenn wir den Atmosphärendruck  $= 0$  setzen, dass  $h = -y$ , wenn die  $y$ -Achse lotrecht gerichtet ist. Für die Geschwindigkeit längs des Spiegels gilt dann, dass

$$\frac{\partial (-kh)}{\partial S} = -\frac{\partial \varphi}{\partial S} = k \cdot \sin \alpha, \quad (87)$$

wenn  $S$  längs des Spiegels gemessen wird und  $\alpha$  der Winkel des Spiegels mit der  $x$ -Achse ist. Wir bilden

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} + k \cdot \sin \alpha = 0; \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial S}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial S} \cdot k \cdot \sin \alpha = 0, \quad (88)$$

was uns ergibt

$$v_x^2 + v_y^2 + k v_x = 0; \quad (v_x + k/2)^2 + v_y^2 = (k/2)^2. \quad (89)$$

Dem letzten Ausdruck entspricht, wie man sieht, in der  $v$ -Ebene ein Kreis. Wir erhalten die Regel, dass einem freien Grundwasserspiegel in der  $v$ -Ebene *ein Kreisbogen* entspricht, der den Radius  $k/2$  hat und dessen Mittelpunkt auf der  $v_y$ -Achse im Abstand  $k/2$  vom Koordinatenmittelpunkt liegt.

## b. Einige Anwendungen.

Wir wollen nun die oben wiedergegebene Methode für unsere Zwecke verwenden und nehmen an, ein Dränsystem mit einer grossen Anzahl untereinander paralleler Leitungen sei in ein Bodenlager von homogener Durchlässigkeit und von grosser Ausdehnung nach den Seiten hin eingelegt. Haben nun diese Leitungen untereinander verschiedene

Wasserführung oder sind sie in verschiedenem Vertikalabstand von einer Horizontalebene verlegt oder haben sie untereinander verschiedene Abstände, so gestalten sich die Begrenzungsflächen zwischen ihren Strömungsbereichen in der Regel nicht als ebene. Das ist auch nicht der Fall, wenn Primärströmungen mit horizontaler Komponente vorkommen. Unter allen diesen Umständen dürfte es uns nicht möglich sein, die Strömungsbereiche der Leitungen auf der Hodographenebene abzubilden, und wir scheinen deshalb auch nicht imstande zu sein, die Strömungsbilder mit Hilfe der Helmholtz-Kirchhoffschen Methode zu konstruieren. Anders liegen die Dinge, wenn eine Primärströmung mit horizontaler Komponente nicht vorkommt sowie wenn die eingelegten Leitungen untereinander die gleiche Wasserführung, Entfernung und Höhenlage haben. Wir erhalten nun, wie aus Symmetriegründen sofort ersichtlich ist, zwischen den Strömungsbereichen der verschiedenen Leitungen ebene Grenzflächen. Dadurch lassen sich die Bereiche auf der Hodographenebene mit grösserer Leichtigkeit abbilden. Wir wollen im Folgenden einige Spezialfälle behandeln, in denen diese Voraussetzungen gelten.

#### *Von unten erfolgender Zufluss zu einem Dränsystem.*

Wir gehen in unserer ersten Anwendung von folgenden Voraussetzungen aus. Ein Bodenlager (Fig. 44) mit homogener Durchlässigkeit sei von einem Grundwasser führenden, leicht durchlässigen Kieslager mit horizontaler oberer Begrenzungsfläche unterlagert. Das Grundwasser im Kieslager stehe unter einem gewissen Druck, was zur Folge hat, dass das Wasser in den Boden hinaufsteigt, der dadurch versumpft wird. Um das Wasser abzuleiten, werde in den Boden ein Dränsystem mit Leitungen von untereinander gleicher Kapazität,  $Q$ , eingelegt, die in untereinander gleicher Höhe über der Oberfläche des Kieslagers und in untereinander gleicher Entfernung,  $b$  (Fig. 44), verlegt seien. Wir erhalten nun eine kontinuierliche Strömung von dem Kieslager hinauf zu den Leitungen, wobei der Strömungsbereich nach oben von einem freien Grundwasserspiegel begrenzt wird. Wir wollen versuchen, das Strömungsbild zu erhalten. Den Spezialfall des Problems, der sich bei der Annahme ergibt, dass der Grundwasserspiegel in seiner ganzen Länge mit der Bodenfläche zusammenfällt, haben früher bereits GARDNER, COLLIER & KARR (1934) mit approximativen aber nicht ganz hinreichenden Methoden behandelt.

Wir können nun im Hinblick auf die Symmetrie von vornherein voraussetzen, dass sich in dem Bilde in der Mitte zwischen je zwei

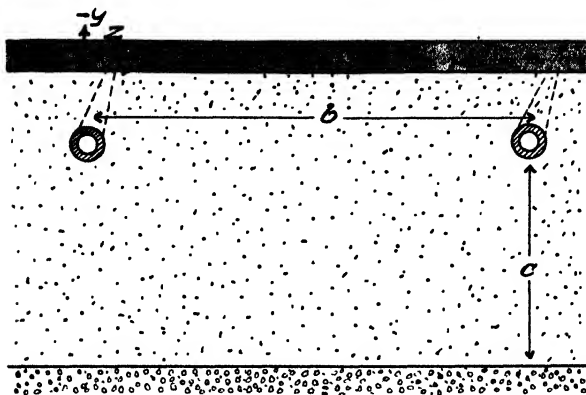


Fig. 44.

Leitungen eine lotrecht gerichtete gerade Stromlinie finde und ebenso direkt oberhalb und direkt unterhalb jeder Leitung. Weiter können wir von vornherein voraussetzen, dass der Grundwasserspiegel seine höchste Lage in der Mitte zwischen zwei Leitungen erreicht und seine tiefste gerade oberhalb jeder Leitung.

Strömungsbild bei grossem Abstand zwischen der Ebene der Leitungen und dem Kieslager.

*Abbildungsfunktion.* Wir nehmen zunächst an, dass sich zwischen der Ebene, den Leitungen und dem nach unten hin begrenzenden Kieslager ein grosser Abstand vorfinde, d. h. der Wert von  $c$  sei gross. Wenn wir dann für den Teil des Strömungsbereiches einer bestimmten Leitung, der links von der Leitung gelegen ist, die Grenzen zeichnen, so bekommen wir ein Bild von dem in Fig. 45 wiedergegebenen Typus, wobei die Leitung in  $C$  gelegen ist. Wir nehmen an, dass der in Rede stehende Teil des Strömungsbereiches (bezeichnet  $ABCDE$ ) auf die Art in der Ebene gelegen sei, dass seine rechte Begrenzungslinie  $BD$  mit der  $y$ -Achse, die als nach unten gerichtet angenommen wird, zusammenfällt. Die zu der Leitung lotrecht von unten kommende Stromlinie bezeichnen wir  $\psi = 0$  und die gerade von oben kommende Stromlinie, die auch die Fläche  $AB$  und die Abgrenzung des Strömungsbereiches nach links bildet, bezeichnen wir  $\psi = Q/2$ .

Den Verlauf der Fläche  $AB$  kennen wir nicht und daher auch nicht die Begrenzung des Strömungsbereiches nach oben. Wir wissen jedoch nach (89), dass die Entsprechung der Fläche in einer Hodographenebene  $v$  mit den Achsen  $v_x$  und  $v_y$  die Form eines Kreisbogens haben





wir darauf sehen, dass dem Halbkreise  $A_1B_1$ , der in  $v$  den Radius  $k/2$  hat, in  $v_2$  ein Halbkreis mit dem Radius 1 entspricht, wobei wir auch den Bereich längs der Abszisse parallel verschieben, so dass der Mittelpunkt des Halbkreises in  $v_2$  in den Koordinatenmittelpunkt zu liegen kommt. Die Transformationsfunktion wird dann, wie sofort einzusehen ist, lauten

$$v_2 = \frac{2v}{k} + i. \quad (90)$$

Hierauf bilden wir den Bereich von  $v_2$  auf einer Ebene  $v_3$  ab, wobei wir den Bereich um den Winkel  $\pi/2$  im Uhrzeigersinne drehen. Als Transformationsfunktion gilt

$$v_3 = i v_2 = i \frac{2v}{k} - 1. \quad (91)$$

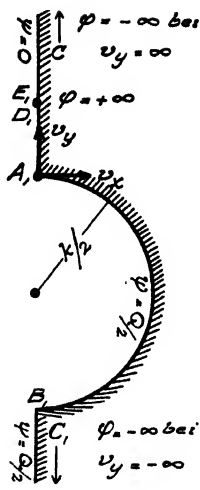


Fig. 46.

Die Grenzen des Strömungsbereiches kommen nun in der  $v_3$ -Ebene so zu liegen, wie Fig. 47 angibt.

Unsere nächste Transformation geht darauf aus, unseren Strömungsbereich in der Weise konform abzubilden, dass wir denselben längs des Einheitskreises »spiegeln« und ein Bild bekommen, das in einem Halbkreis gelegen ist. Die Transformationsfunktion für eine solche Spiegelung lautet, wie leicht einzusehen ist,

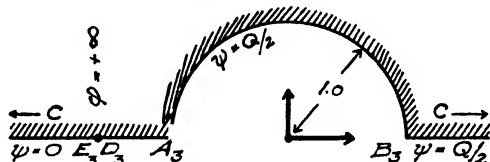


Fig. 47.

Die Transformationsfunktion für eine solche Spiegelung lautet, wie leicht einzusehen ist,

$$v_4 = \frac{1}{v_3} = \frac{k}{i 2v - k}, \quad (92)$$

und die Grenzen für den Strömungsbereich kommen so zu liegen, wie in Fig. 48 angegeben ist.

Als nächste Transformation bilden wir den von uns erhaltenen Halbkreis auf der oberen Hälfte einer Ebene  $v_5$  ab, wobei wir darauf achten, dass der Halbkreis in  $A_4$  aufgebrochen und so in die Gerade aufgerollt wird, dass der ganzen Grenzlinie des Strömungsbereiches  $A_4B_4C_4D_4A_4$  in der  $v_5$ -Ebene die Ordinate entspricht.

Als Transformationsfunktion gilt (»HÜTTE« 1926)

$$v_5 = \frac{(1 - v_4)^2}{(1 + v_4)^2} \quad \text{oder, nach (92),} \quad v_5 = \left( \frac{v + i k}{v} \right)^2. \quad (93)$$

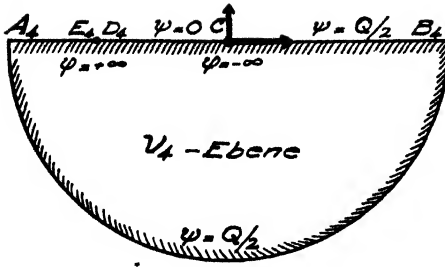


Fig. 48.

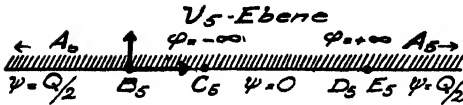


Fig. 49.

Wir haben nun unseren Strömungsbereich zu einer Halbebene (Fig. 49) umgeformt, und in dieser gehen nun sämtliche Stromlinien von  $D_5E_5$  nach  $C_5$ . Wir haben also hier eine »Quellen-Senken-Strömung« nach Fig. 8. Diese Strömung können wir leicht als eine Parallelströmung in einer  $\omega$ -Ebene abbilden, wobei die auf S. 34 mit Hilfe des Schwarz-Christoffelschen Satzes erhaltene Funktion gilt,

$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \cdot \ln \frac{v_5 - a_1}{v_5 - a_2}, \quad (94)$$

worin  $a_1$  sowie  $a_2$  die Koordinaten des Punktes  $D_5E_5$  bzw. des Punktes  $C_5$  sind. Wir erhalten diese Koordinaten aus (93):

$$a_1 = \left( \frac{iQ/b + ik}{iQ/b} \right)^2 = \left( \frac{Q + bk}{Q} \right)^2; \quad a_2 = 1,$$

und können schreiben

$$\begin{aligned} \omega &= i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\left( \frac{v+ik}{v} \right)^2 - \left( \frac{Q+bk}{Q} \right)^2}{\left( \frac{v+ik}{v} \right)^2 - 1} = \\ &= i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\left( \frac{v+ik}{v} - \frac{Q+bk}{Q} \right) \left( \frac{v+ik}{v} + \frac{Q+bk}{Q} \right)}{\left( \frac{v+ik}{v} - 1 \right) \left( \frac{v+ik}{v} + 1 \right)}. \end{aligned} \quad (95)$$

Wir kennen nun unsere gesuchte Funktion (82) und gehen weiter um (84) zu suchen. Wir zeichnen

$$\frac{Q + bk}{Q} = a \quad (96)$$

und schreiben (95)

$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{v+ik}{v} - a \right) + \ln \left( \frac{v+ik}{v} + a \right) - \ln \left( \frac{v+ik}{v} - 1 \right) - \ln \left( \frac{v+ik}{v} + 1 \right) \right], \quad (97)$$

worauf die Differenzierung uns ergibt

$$d\omega = i \frac{Qk}{2\pi} \left[ \frac{1}{(v-v\alpha+ik)v} + \frac{1}{(v+v\alpha+ik)v} - \frac{1}{(2v+ik)v} - \frac{1}{ikv} \right] dv. \quad (98)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} z &= - \int \frac{d\omega}{v} = \\ &= - \int i \frac{Qk}{2\pi} \left[ \frac{1}{(v-v\alpha+ik)v^2} + \frac{1}{(v+v\alpha+ik)v^2} - \frac{1}{2v+ik} - \frac{1}{ikv} \right] dv = \\ &= i \frac{Q}{2\pi k} \left[ (1-\alpha) \ln \frac{v(1-\alpha)+ik}{v} + (1+\alpha) \ln \frac{v(1+\alpha)+ik}{v} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \ln \frac{2v+ik}{v} \right] + C, \quad (99) \end{aligned}$$

worin  $C$  eine komplexe Konstante ist, deren Grösse davon abhängt, wie wir das Strömungsbild im Verhältnis zu den Achsen der  $z$ -Ebene verlegen. Wir setzen bis auf weiteres  $C = 0$ .

Nun ist nach (95)

$$v = \sqrt[3]{\frac{ik}{\frac{e^{-\frac{2\pi\omega}{Q}} + a^2}{e^{-\frac{2\pi\omega}{Q}} + 1} - 1}}, \quad (100)$$

und wir erhalten daher schliesslich durch Einsetzen in (99)

$$\begin{aligned} z &= i \frac{Q}{2\pi k} \left\{ \left( 1 - \frac{Q+bk}{Q} \right) \ln \left[ \sqrt[3]{\frac{e^{-\frac{2\pi\omega}{Q}} + \left( \frac{Q+bk}{Q} \right)^2}{e^{-\frac{2\pi\omega}{Q}} + 1}} - \frac{Q+bk}{Q} \right] + \right. \\ &\quad + \left( 1 + \frac{Q+bk}{Q} \right) \ln \left[ \sqrt[3]{\frac{e^{-\frac{2\pi\omega}{Q}} + \left( \frac{Q+bk}{Q} \right)^2}{e^{-\frac{2\pi\omega}{Q}} + 1}} + \frac{Q+bk}{Q} \right] - \\ &\quad \left. - 2 \ln \left[ \sqrt[3]{\frac{e^{-\frac{2\pi\omega}{Q}} + \left( \frac{Q+bk}{Q} \right)^2}{e^{-\frac{2\pi\omega}{Q}} + 1}} + 1 \right] \right\}. \quad (101) \end{aligned}$$

*Der Grundwasserspiegel.* Wir suchen hierauf die Gleichung für den Grundwasserspiegel. Längs derselben ist  $\varphi = Q/2$  und die unter der Wurzel stehenden Ausdrücke in (101) gehen für sie über in

$$\frac{e^{-\frac{2\pi\varphi}{Q}} - \left(\frac{Q+bk}{Q}\right)^2}{e^{-\frac{2\pi\varphi}{Q}} - 1}.$$

Wir setzen die fraglichen Ausdrücke in den weiteren Rechnungen  $= \beta^2$ . Wenn  $\beta$  reell ist, sehen wir aus (100), dass  $v_x = 0$  wird. Das ist längs den Wasserspiegel nur in ihren Endpunkten der Fall, und wir können daher voraussetzen, dass  $\beta$  für die Fläche sonst imaginär ist. Wir erhalten aus (101)

$$x = -\frac{Q}{2\pi k} \left[ (1-\alpha) \operatorname{arctg} \frac{\beta}{a} + (1+\alpha) \operatorname{arctg} \frac{\beta}{a} - 2 \operatorname{arctg} \beta \right],$$

oder

$$x = -\frac{Q}{\pi k} \left( \alpha \operatorname{arctg} \frac{\beta}{a} - \operatorname{arctg} \beta \right)$$

d. h.

$$x = -\frac{Q}{\pi k} \left[ \frac{Q+bk}{Q} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{e^{-\frac{2\pi\varphi}{Q}} - \left(\frac{Q+bk}{Q}\right)^2}{e^{-\frac{2\pi\varphi}{Q}} - 1}} - \frac{Q+bk}{Q} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{e^{-\frac{2\pi\varphi}{Q}} - \left(\frac{Q+bk}{Q}\right)^2}{e^{-\frac{2\pi\varphi}{Q}} - 1}} \right]. \quad (102)$$

Weiter erhalten wie aus (101)

$$y = \frac{Q}{2\pi k} [(1-\alpha) \ln \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + (1+\alpha) \ln \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - 2 \ln \sqrt{1 - \beta^2}],$$

was uns nach einer einfachen Rechnung

$$y = \frac{Q}{2\pi k} \ln e^{-\frac{2\pi\varphi}{Q}} = -\varphi/k \quad (103)$$

gibt.

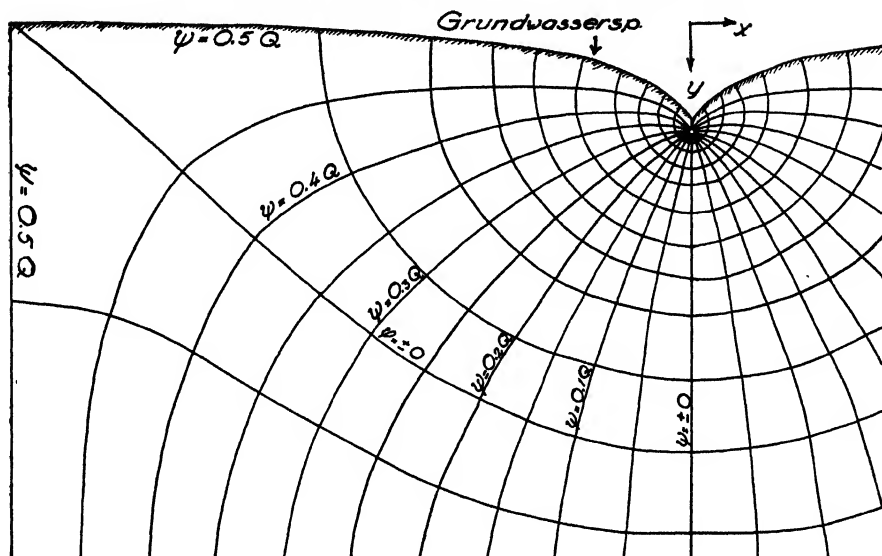


Fig. 50. Strömungsbild in einer teilweise wassergefüllten Bodenmasse bei einem von unten erfolgenden Zufluss zu Dränleitungen, die untereinander gleiche Wasserführung haben und in untereinander gleicher Tiefe und gleichem Abstand verlegt sind.  $k = 1 \cdot 10^{-3}$ ,  $b = 1000$  cm,  $Q = 1,0$  l pro 100 m Leitungslänge. Der Wert von  $c$  wird als sehr gross, der von  $R$  als sehr klein angenommen.

Nach Einsetzen von (103) in (102) erhalten wir schliesslich

$$x = -\frac{Q}{\pi k} \left[ \frac{Q + bk}{Q} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\frac{e^{\frac{2\pi ky}{Q}} - (Q + bk)^2}{Q}}}{\frac{e^{\frac{2\pi ky}{Q}} - 1}{Q + bk}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\frac{e^{\frac{2\pi ky}{Q}} - (Q + bk)^2}{Q}}}{\frac{e^{\frac{2\pi ky}{Q}} - 1}{Q}} \right] \quad (104)$$

als Gleichung des Grundwasserspiegels. Setzen wir hier  $y = 0$ , so erhalten wir  $x = -b/2$ . Wenn dann  $y$  von 0 an zunimmt, wächst  $x$  und steigt gegen 0. Wir sehen hieraus, dass wir, indem wir  $C$  in (101) = 0 setzten, unser Strömungsbild von Fig. 45 in der  $xy$ -Ebene so gestellt bekamen, dass der rechte Teil des Bildes mit der nach

unten gerichteten  $y$ -Achse zusammenfällt, und so, dass der höchste Punkt des Wasserspiegels auf die nach rechts gerichtete  $x$ -Achse zu liegen kommt.

Aus (104) erhalten wir die  $y$ -Koordinate für den höchsten Punkt des Grundwasserspiegels (in der Mitte zwischen zwei Leitungen) mit 0. Der tiefste Punkt (gerade oberhalb einer Leitung) muss nach (104) sich ergeben, wenn die Ausdrücke unter der Wurzel = 0 sind, d. h. wenn

$$e^{\frac{2\pi k y}{Q}} = \left( \frac{Q + b k}{Q} \right)^2$$

oder wenn

$$y = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{Q + b k}{Q}. \quad (105)$$

Die Lage der Leitung erhalten wir aus (101), indem wir  $\varphi = -\infty$  und  $\psi = 0$  setzen.  $\beta$  wird dann = 1. Wir erhalten

$$y = \frac{Q}{2\pi k} \left[ \frac{1}{2} (1-a) \ln (1-a)^2 + \frac{1}{2} (1+a) \ln (1+a)^2 - \ln 4 \right]$$

d. h.

$$y = \frac{Q}{2\pi k} \left[ -\frac{k b}{2Q} \ln \left( \frac{k b}{Q} \right)^2 + \frac{2Q + k b}{2Q} \ln \frac{2Q + k b}{Q} - \ln 4 \right]. \quad (106)$$

In Fig. 50 ist für eine zahlenmässige Beleuchtung von (104) die Lage des Grundwasserspiegels unter gewissen Voraussetzungen eingezeichnet.

*Strömungsbild.* Nachdem wir nun die Grenzen des Strömungsbereiches erhalten haben, ist die nächste Aufgabe, das Strömungsbild zu konstruieren. Um eine solche Konstruktion exakt ausführen zu können, müssen wir in unserer Abbildungsfunktion (101) zuerst reelle und imaginäre Glieder voneinander trennen. Eine solche Trennung bringt aber mathematische Schwierigkeiten mit sich. Der Verfasser hat deshalb die Trennung nicht durchgeführt, sondern hat sich damit begnügt, mit freier Hand das Bild eines bestimmten Falles zu konstruieren, nachdem die Lage des Wasserspiegels bestimmt worden war. Dieses ist in Fig. 50 zu finden.

Strömungsbild bei geringerem Abstand zwischen der Ebene der Leitungen und dem Kieslager.

Wir nehmen als zweiten Fall an, dass zwischen der Ebene, den Leitungen und dem nach unten begrenzenden Kieslager sich nur ein kleinerer Abstand vorfinde, d. h. dass der Wert von  $c$  in Fig. 44 relativ

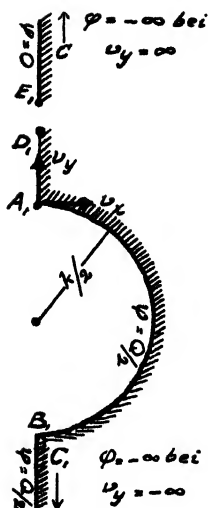


Fig. 52.

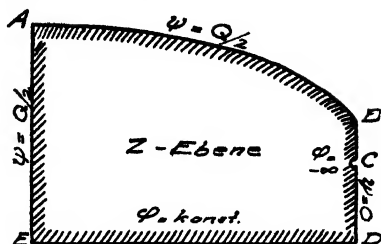


Fig. 51.

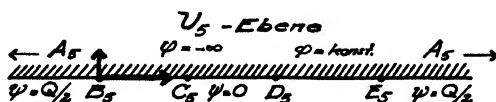


Fig. 53.

klein sei. Zeichnen wir nun die Grenzen für den Teil des Strömungsbereiches einer Leitung, der links von der Leitung gelegen ist, so erhalten wir Fig. 51. Die Grenzfläche  $ED$  zwischen den Lagern können wir wie früher als eine Potentialfläche betrachten, aber da  $c$  jetzt kleiner ist als früher, können wir nicht mehr voraussetzen, dass die Strömungsgeschwindigkeit  $v_x$  längs der Fläche konstant ist. Sie ist vielmehr von  $E$  nach  $D$  im Steigen. Dies besagt, dass die Punkte  $D_1$  und  $E_1$  nicht mehr wie früher in der  $v$ -Ebene zusammenfallen, sondern ein Stück voneinander auf der  $v_y$ -Achse liegen (s. Fig. 52). Übertragen wir hierauf wie früher den in der  $v$ -Ebene erhaltenen Bereich auf eine obere Halbebene  $v_5$ , wobei die Transformationsfunktion (93) zur Anwendung kommt, so erhalten wir das in Fig. 53 dargestellte Bild. Unsere Stromlinien gehen jetzt hier nicht wie früher von einem Punkt zu einem anderen, sondern von einem Schlitz  $D_5E_5$  zu einem Punkt  $C$ . Diese Strömung können wir mit Hilfe des Schwarz-Christoffelschen Satzes zu einer Parallelströmung in einer  $v$ -Ebene umformen, wobei, wie sich herausstellt, die Transformationsfunktion zu

$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{(v_5 - a_1) \sqrt{(v_5 - a_1)^2 - t^2}}{t(v_5 - 1)} \quad (107)$$

wird, wobei  $t$  die Schlitzbreite und  $a_1$  eine Konstante darstellt. Nach Zusammenstellung mit (93) erhalten wir



$$\omega = i \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\left( \frac{v+ik}{v} - a_1 \right) \sqrt{\frac{v+ik}{v} - a_1 - t^2}}{t \left[ \left( \frac{v+ik}{v} \right)^2 - 1 \right]} \quad (108)$$

und können jetzt das Strömungsbild in der Hodographenebene einzeichnen. Die Integrierung gibt uns dann unser gesuchtes Strömungsbild. Die hierher gehörigen Berechnungen sind indessen kompliziert und sollen hier nicht durchgeführt werden.

*Von oben erfolgender Zufluss zu einem Dränsystem.*

Wir haben in dem Obigen vorausgesetzt, dass der Zufluss zu einem Dränsystem von Bodenlagern erfolgt, die tiefer gelegen sind als das System. In geologischen Verhältnissen Schwedens kann eine solche Strömung vorkommen, wenn z. B. ein neben einem Rullstensos liegender Boden gedrünt wird. Ein solcher Boden ist oft von Oberflächenmoränenlagern oder von anderem leichtdurchlässigen Material unterlagert, in dem oft infolge der Verbindung mit dem häufig grundwasserreichen Rullstensos ein relativ hoher Grundwasserdruk vorkommt.

Gewöhnlich verhält es sich aber so, dass das Dränwasser seinen direkten Ursprung in den Niederschlägen hat. Die Niederschläge fallen auf die Bodenoberfläche, sinken durch dieselbe, gehen dann als Sinkwasser durch die nicht ganz wassergefüllten Lager des Bodens weiter und erreichen die völlig wassergefüllte Zone. Dadurch steigt der Grundwasserspiegel, und wenn er bis zu dem Niveau der Leitungen reicht, tritt das Dränsystem in Tätigkeit (Kurve I in Fig. 54). Der Grundwasserspiegel steigt nach und nach weiter und seine Erhöhung wird dort am grössten, wo die kleinste Grundwassermenge abgeführt wird, d. h. in der grössten Entfernung von den Leitungen. Wir erhalten einen bogenförmigen Grundwasserspiegel (Kurve II in Fig. 54), der seine höchsten Punkte in der grössten Entfernung von den Leitungen hat und seine tiefsten gerade oberhalb derselben. Je grösser die Niederschlagsmenge ist, desto höher wird der Grundwasserspiegel steigen, und wenn die Niederschläge genügend hoch sind, erreicht er mit seinen höheren Teilen die Bodenfläche und wird in diesen mit ihr ganz zusammenfallen (Kurve III in Fig. 54). Vermehren sich die Niederschläge noch weiter, so erreicht der Grundwasserspiegel völlig die Bodenoberfläche und fällt an allen Punkten mit dieser zusammen oder übersteigt sie (Kurve IV in Fig. 54).

Der oben genannte Fall IV ist auf den SS. 33—84 schon früher be-

handelt worden. Fall I dürfte annähernd nach den gleichen Methoden bearbeitet werden können. Fall II und III sind jedoch komplizierter und müssen nach den in unserem jetzigen Zusammenhang angegebenen Methoden behandelt werden. Wir wollen in dem Folgenden einen Spezialfall von Fall II herausgreifen, bei dem wir auf Grund der Tatsache, dass wir von dem auf den SS. 100—108 erörterten Fall ausgehen können, ziemlich leicht zu einer Lösung gelangen können.

Wir nehmen an, dass dieselben Voraussetzungen bestehen, die auf S. 42 bei der Behandlung einer Strömung in ganz wassergefülltem Boden vorausgesetzt wurden, d. h. wir nehmen an, dass in ein Bodenschicht mit grosser Ausdehnung nach den Seiten und nach der Tiefe hin

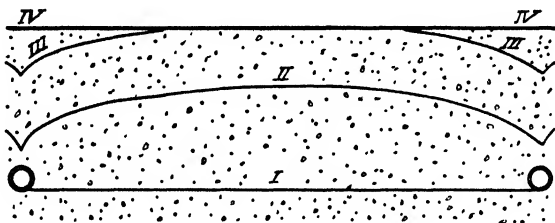


Fig. 54.

eine grosse Anzahl untereinander paralleler Dränleitungen mit untereinander gleicher Wasserführung immer in dem gleichen gegenseitigen Abstand,  $b$ , und der gleichen Höhe über einer Horizontalebene eingelegt sind. Wir setzen weiter voraus, dass auf die Bodenfläche konstant eine gewisse Niederschlagsmenge falle, und dass diese Menge so gross sei, dass jeder Leitung per Längen- und Zeiteinheit die Wassermenge  $Q$  zugeführt werde. Wir fragen, wie das Strömungsbild zwischen zwei Leitungen sich gestalten wird wenn der Strömungskoeffizient  $k_1$  ist, und nachdem der Gleichgewichtszustand eingetreten ist.

Hierbei gehen wir von dem in Fig. 50 dargestellten Strömungsbild aus, das für eine von unten kommende Strömung bei sonst gleichen Voraussetzungen wie oben gilt. Zu dieser Strömung addieren wir eine lotrecht gerichtete Parallelströmung:

$$\omega = \varphi + i\psi = i\frac{Q}{b}(x + iy), \quad (109)$$

wobei wir ein Strömungsbild erhalten, das sich als

$$\begin{aligned}
 z = \frac{Q}{2\pi k} & \left\{ \left(1 - \frac{Q+bk}{Q}\right) \ln \left[ \sqrt{\frac{e^{-\frac{2\pi\omega}{Q}} + \left(\frac{Q+bk}{Q}\right)^2}{e^{-\frac{2\pi\omega}{Q}} + 1}} - \frac{Q+bk}{Q} \right] + \right. \\
 & + \left(1 + \frac{Q+bk}{Q}\right) \ln \left[ \sqrt{\frac{e^{-\frac{2\pi\omega}{Q}} + \left(\frac{Q+bk}{Q}\right)^2}{e^{-\frac{2\pi\omega}{Q}} + 1}} + \frac{Q+bk}{Q} \right] - \\
 & \left. - 2 \ln \left[ \sqrt{\frac{e^{-\frac{2\pi\omega}{Q}} + \left(\frac{Q+bk}{Q}\right)^2}{e^{-\frac{2\pi\omega}{Q}} + 1}} + 1 \right] \right\} - \frac{ib}{Q} \omega \quad (110)
 \end{aligned}$$

zeichnen lässt. Wir »löschen« damit, wie sofort einzusehen ist, die ursprüngliche Strömung bei  $y = \infty$  ganz »aus«, d. h. wir können die Sache so betrachten, als ob hier eine Bodenwand eingelegt sei.

Längs des ursprünglichen Grundwasserspiegels gilt nach der Addition, dass

$$\psi = \frac{Q}{2} + x \frac{Q}{b} \quad (111)$$

und dass

$$-\varphi = ky + \frac{Q}{b} y. \quad (112)$$

Setzen wir nun

$$k + \frac{Q}{b} = k' \quad (113)$$

so kann (112) geschrieben werden

$$-\varphi = k' y, \quad (114)$$

woraus folgt, dass das erhaltene Bild unserem gesuchten Strömungsbild entspricht, wenn der Strömungskoeffizient in unseren gesuchten Fall,  $k'$ , in solcher Relation zu  $k$  steht wie (113) angibt.

Als Gleichung für den Grundwasserspiegel gilt wie früher (104).

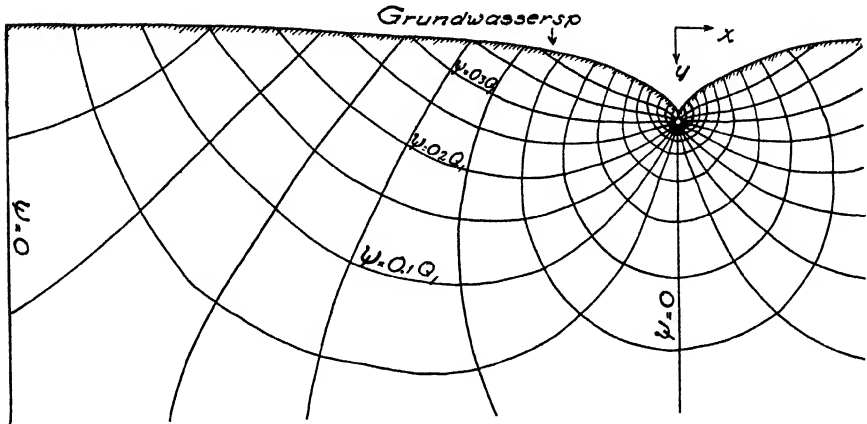


Fig. 55. Strömungsbild in einer teilweise wassergefüllten gedranten Bodenmasse bei von oben erfolgtem Zufluss zu Dränleitungen, die untereinander gleiche Wassermengen führen und in der gleichen Tiefe und in gleichem Abstand verlegt sind.  $k' = 1,1 \cdot 10^{-3}$ ,  $b = 1000$ ,  $Q = 1,0$  l/sek je 100 m Leitungslänge. Der Wert von  $c$  wird als sehr gross, der von  $R$  als sehr klein angenommen.

Eine exakte Konstruktion des Strömungsbildes fordert, dass in (110) reelle und imaginäre Glieder voneinander geschieden werden. Da eine solche Scheidung — wie im Falle von (101) — mit beträchtlichen Schwierigkeiten verbunden ist, ist sie hier nicht durchgeführt worden. Der Verfasser hat sich statt dessen begnügt, auf graphischem Wege auf Grundlage des Bildes von Fig. 50 ein Bild unter bestimmten gegebenen Voraussetzungen zu konstruieren. Das Bild ist in Fig. 55 zu finden.

#### *Die Abhängigkeit des Strömungsbildes von der Kapillarität des Bodens.*

Bei der oben erfolgten Ableitung der Strömungsbilder wurde u. a. vorausgesetzt, dass der Grundwasserspiegel die Abgrenzung des Strömungsbereiches nach oben darstelle. Das kann annähernd nur in Bodenarten von grosser Korngrösse, z. B. Kiesböden, der Fall sein. In feinkornigen Bodenarten muss darauf Rücksicht genommen werden, dass auch die Kapillarzone zum Strömungsgebiet gehört. Dem kann dadurch in Rechnung getragen werden, dass wir in den oben gemachten Grundvoraussetzungen für die Ableitung, statt den Druck längs des Grundwasserspiegels  $= 0$  zu setzen, ihn unmittelbar unter den Menisken des oberen Teiles der Kapillarzone  $= 0$  setzen, worauf die Ableitungen unverändert bleiben.

### C. *Modellversuche.*

Im Obigen wurde die Wasserströmung in teilweise wassergefülltem gedräntem Boden unter bestimmten Voraussetzungen behandelt, wobei der Ausgangspunkt für die rein theoretische Diskussion die Fundamentalgleichung der Grundwasserbewegung war. Die erhaltenen Ergebnisse hat der Verfasser durch gewisse Modellversuche zu verifizieren versucht, über die die folgende Darstellung berichtet.

#### a. *Versuche an Bodenmodellen.*

Die ersten Modellversuche wurden an den früher beschriebenen Modellen 1 und 2 und mit den früher beschriebenen Bodenmaterialien I—IV (s. S. 63—64) ausgeführt. Dabei wurden nach der bereits beschriebenen Methodik Strömungsbilder in direktem Anschluss an die oben gegebenen theoretischen Untersuchungen konstruiert, teils für Zufluss von unten, teils für Zufluss von oben, wobei der Niederschlag in der Weise nachgebildet wurde, dass das Wasser durch eine eigene Vorrichtung über die Bodenfläche gespritzt wurde.

Indessen ergaben sich bei diesen Untersuchungen beträchtliche experimentelle Schwierigkeiten, die es unmöglich machten, die Strömungsbilder in befriedigender Weise heraustreten zu lassen. Vor allem erwies es sich schwierig, Aufschlüsse über die Strömungsverhältnisse in der Nähe der oberen Grenzfläche des Strömungsbereiches zu erhalten. Die Abgrenzung der Kapillärzone nach oben stellte sich nämlich infolge der verschiedenen Grösse, Form und Lagerung der Bodenkörner als sehr diffus heraus. Nur im unteren Teile der Zone waren sämtliche Poren des Bodens wassergefüllt, während weiter oben zunächst nur die grösseren und dann immer kleinere Poren luftgefüllt blieben. Die Stromlinie längs der Fläche ( $\psi = 0$ ) gestaltete sich hierdurch unregelmässig.

#### b. *Modellversuche mit freiem Wasser.*

Infolge der genannten experimentellen Schwierigkeiten, die bei den Modellversuchen bei Anwendung von Bodenmaterial auftraten, wurde für diese ein anderer Weg versucht, wobei freies Wasser laminar und zweidimensional zwischen zwei planparallelen und einander nahe gelegenen Wänden dahinströmen konnte. Das Strömungsbild, das hier unter gewissen Grenzbedingungen entsteht, muss, wie unten gezeigt wird, formale Gleichheit mit einem im Boden unter denselben

Bedingungen sich ergebenden Strömungsbild haben. Die Methode ist für das Studium der Strömung bei Grundwasser ohne freie Fläche von DACHLER (1936) angewendet worden.

### Theoretische Grundlagen.

Für eine laminare Strömung zwischen zwei planparallelen Wänden kann folgende Ableitung gemacht werden (KAUFMANN 1931). Wir

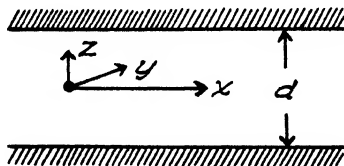


Fig. 56.

nehmen an, dass die Wände vertikal sind und einen gegenseitigen Abstand  $d$  voneinander haben. Legen wir in das Strömungsbereich ein Koordinatensystem in der Weise, wie es Fig. 56 zeigt, und wenden wir die Navier-Stokeschen Bewegungsgleichungen für zähe Flüssigkeiten (18) an, so können wir schreiben

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + b_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\gamma h)}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + b_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\gamma h)}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (115)$$

worin  $h$  der Wasserstand,  $\gamma$  das spezifische Gewicht des Wassers,  $\eta$  der Zähigkeitskoeffizient und  $\rho$  die Dichte ist. An den Wänden ist die Strömungsgeschwindigkeit  $= 0$ , weshalb, wenn diese nahe aneinander liegen, von ihnen weg und nach aussen hin ein grosser Geschwindigkeitsabfall im Vergleich mit den Geschwindigkeitsänderungen bei Fortbewegungen an den Wänden vorausgesetzt werden kann. Wir können daher die Grössen  $\partial v_x / \partial x$ ,  $\partial v_x / \partial y$  bzw.  $\partial v_y / \partial x$ ,  $\partial v_y / \partial y$  im Vergleich mit  $\partial v_x / \partial z$  und  $\partial v_y / \partial z$  vernachlässigen, wobei wir aus (115) erhalten

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{\partial(\gamma h)}{\partial x}; \quad \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = \frac{\partial(\gamma h)}{\partial y}. \quad (116)$$

Diese Ausdrücke ergeben uns hernach, da  $\partial(\gamma h) / \partial x$  und  $\partial(\gamma h) / \partial y$  von  $z$  unabhängig sind,

$$v_x = \iint \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial(\gamma h)}{\partial x} \cdot \partial^2 z = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial(\gamma h)}{\partial x} \cdot \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

$$v_y = \iint \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial(\gamma h)}{\partial y} \cdot \partial^2 z = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial(\gamma h)}{\partial y} \cdot \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

oder, da bei  $z = \pm d/2$   $v_x = v_y = 0$  ist,

$$v_x = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\partial(\gamma h)}{\partial x} \left( z^2 - \frac{d^2}{4} \right); \quad v_y = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\partial(\gamma h)}{\partial y} \left( z^2 - \frac{d^2}{4} \right). \quad (117)$$

Als Ausdruck für die Mittelgeschwindigkeiten zwischen den Platten erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} -v_{xm} &= \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} v_x dz = \frac{d^2}{12\eta} \cdot \frac{\partial(\gamma h)}{\partial x} \\ -v_{ym} &= \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} v_y dz = \frac{d^2}{12\eta} \cdot \frac{\partial(\gamma h)}{\partial y} \end{aligned} \right\}. \quad (118)$$

Diese lassen sich also von einem Potential  $\varphi$  ableiten, das geschrieben werden kann

$$\varphi = \frac{d^2}{12\eta} \gamma h. \quad (119)$$

Da für die Grundwasserströmung die Gleichung  $\varphi = kh$  gilt, sehen wir nun, dass zwischen der freien Strömung zwischen Platten und einer Grundwasserströmung mit denselben Grenzbedingungen formale Gleichheit bestehen muss, wenn für die letztere der Satz gilt, dass

$$k = \frac{d^2 \cdot \gamma}{12\eta} \quad (120)$$

ist.

### Apparatur.

Für die Modellversuche mit freiem Wasser wurde eine besondere Apparatur, Modell 3, verwendet, deren Prinzip und Aussehen in Fig. 57 und 58 gezeigt wird. Sie bestand aus zwei ebenen Scheiben aus Spiegelglas, zwischen denen ein U-förmiger Streifen von Gummituch in der Weise eingelegt wurde, dass der Streifen die obere horizontale und die zwei vertikalen Scheibenkanten entlang lief. Hierauf wurden die Scheiben und das dazwischen liegende Tuch in einen Spannrahmen von Stahl gebracht, in dem die Scheiben gegeneinander gepresst wer-

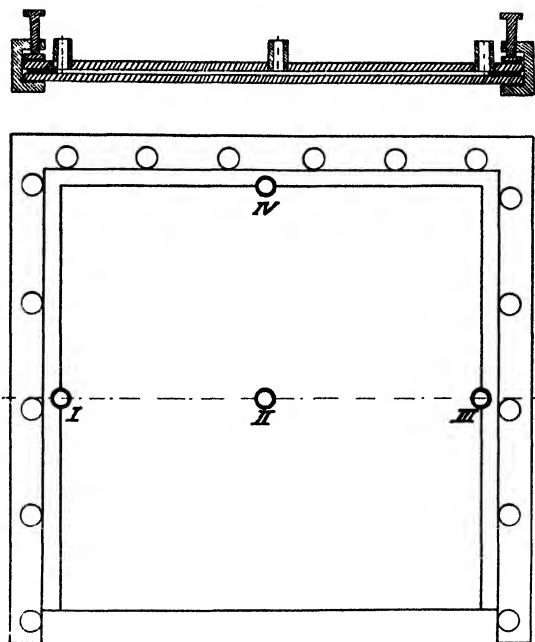
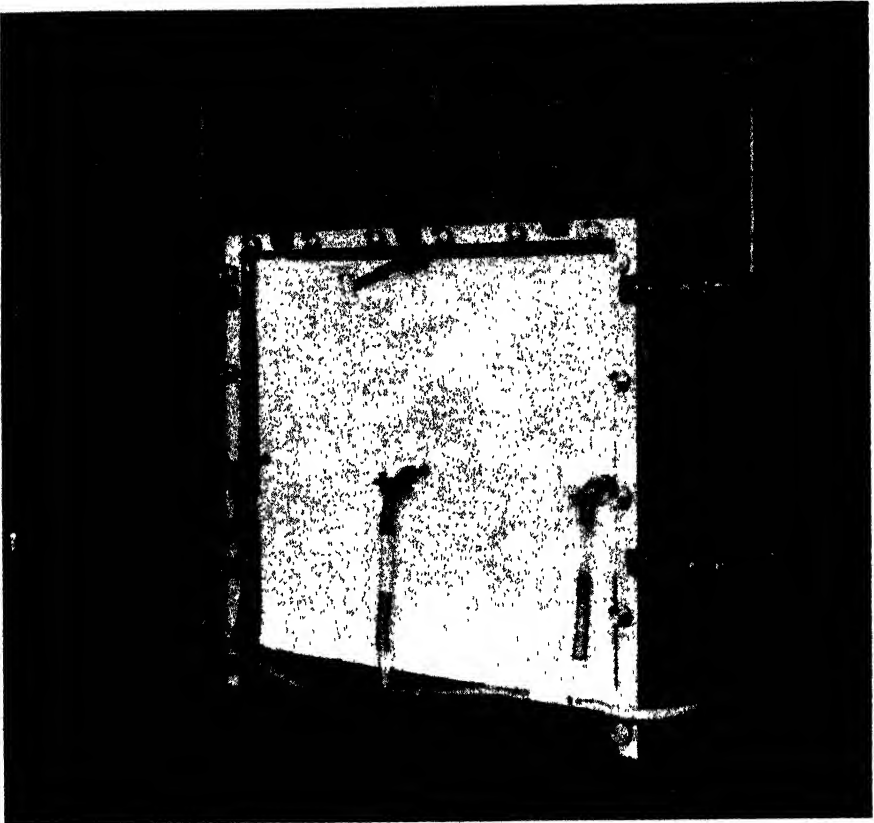


Fig. 57. Schematische Skizze zu Modell 3.

den konnten. Auf diese Weise entstand zwischen den Scheiben ein schmales, rechteckiges Fach, das nach unten offen war. Die Abmessungen der Scheiben und die Dicke des Gummituches wurden so gewählt, dass die inneren Masse des dazwischen liegenden flachen Raumes  $450 \times 450 \times 0,4$  mm waren. Auf der einen der Glasscheiben befanden sich 4 gebohrte Löcher, I—IV, in die Glasröhren mit einem Innendurchmesser von 1,0 cm eingeschliffen waren, so dass die gegen das Innere des Faches weisende ringförmige Grenzfläche der Röhren mit der Innenfläche der Glaswand in eine Ebene zu liegen kam. Eines der Löcher, II, war so angebracht, dass die Verlängerung seiner Achse den Mittelpunkt des Faches traf, während die drei übrigen, I, III und IV, gerade in der Mitte zwischen den Ecken des Faches angebracht waren, und zwar so, dass die Verlängerung ihrer Achsen mit der Innenfläche des Gummituches parallel laufen musste. Mitten vor einem jeden der letztgenannten Löcher wurde in dem Gummituche ein halbkreisförmiger Ausschnitt gemacht, dessen Durchmesser der gleiche war, wie der innere der Röhre. Die Röhren, an die Schlauchleitungen angekoppelt werden konnten, sollten, soweit I—III in Betracht kamen, als Abflussöffnungen für das Wasser, d. h. als Dränleitungen dienen, während IV als Luftleitung Verwendung finden sollte.





*Fig. 58. Photographie von Modell 3.*

Bei den Versuchen wurde das Modell mit seinem unteren Teil in ein grosses Gefäss mit Wasser hinabgesenkt, so dass die untere, offene Seite des Faches etwas unter der Wasseroberfläche zu liegen kam. Eine von Öffnung IV ausgehende Schlauchleitung wurde an eine Luftglocke angeschlossen, die im Verhältnis zu den Raummassen des Modellfaches ein grosses Volumen hatte. Nachdem die Öffnungen I—III geschlossen waren, wurde der Luftdruck in der Glocke verringert, was zur Folge hatte, dass das Wasser im Modell aufstieg. Wenn es über das Niveau der Öffnungen I—III gekommen war, wurden eine oder einige derselben geöffnet, und es konnte per Zeiteinheit eine gewisse Wassermenge,  $Q$ , ablaufen. Wenn nun der Druck in der Glocke endgültig so reguliert wurde, dass der höchste Punkt der Wasseroberfläche im Modell so hoch über dem Niveau der Öffnungen I—III zu liegen kam, wie das nach (104) theoretisch der Fall sein soll, so sollte

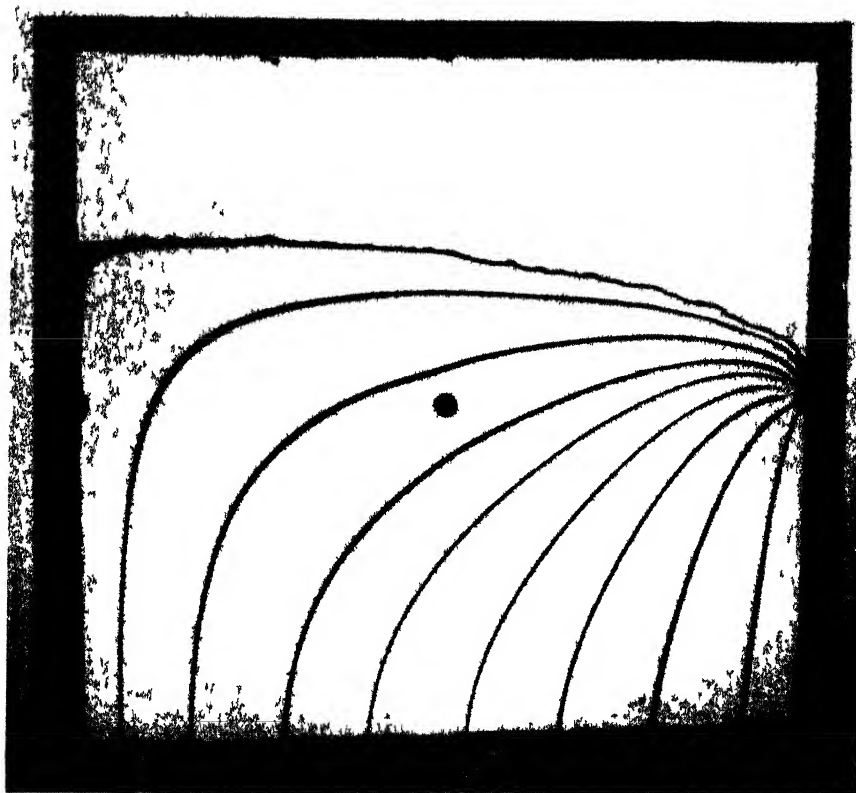


Fig 59 Stromungsbild in Modell 3 bei Abfluss durch Ablauföffnung III

das Stromungsbild, mit Rücksicht darauf, dass der Abstand zwischen dem eben genannten Niveau und der nach unten gehenden Öffnung des Modellfaches relativ gross ist, mit guter Annäherung dem auf theoretischem Wege erhaltenen Bilde entsprechen

#### *Ausgeführte Versuche*

*Die Lage der Fläche.* In einer Serie von Versuchen wurde die Lage der freien Fläche im Vergleiche zu einer aus (104) berechneten Lage studiert. Bei den Versuchen war die Temperatur des Wassers  $9,0^{\circ}\text{C}$ , woraus sich  $\eta$  aus (7) sich auf  $13,73 \cdot 10^{-6} \text{ gr sec/cm}^2$  berechnen liess, die Tiefe des Modellfaches,  $d$ , war  $0,04 \text{ cm}$ , weshalb die Stromung nach (120) einer Grundwasserströmung bei  $k = 9,85 \text{ cm/sec}$  entsprechen sollte. Die Ergebnisse der Versuche sind in Tabelle 5 zusammengestellt.

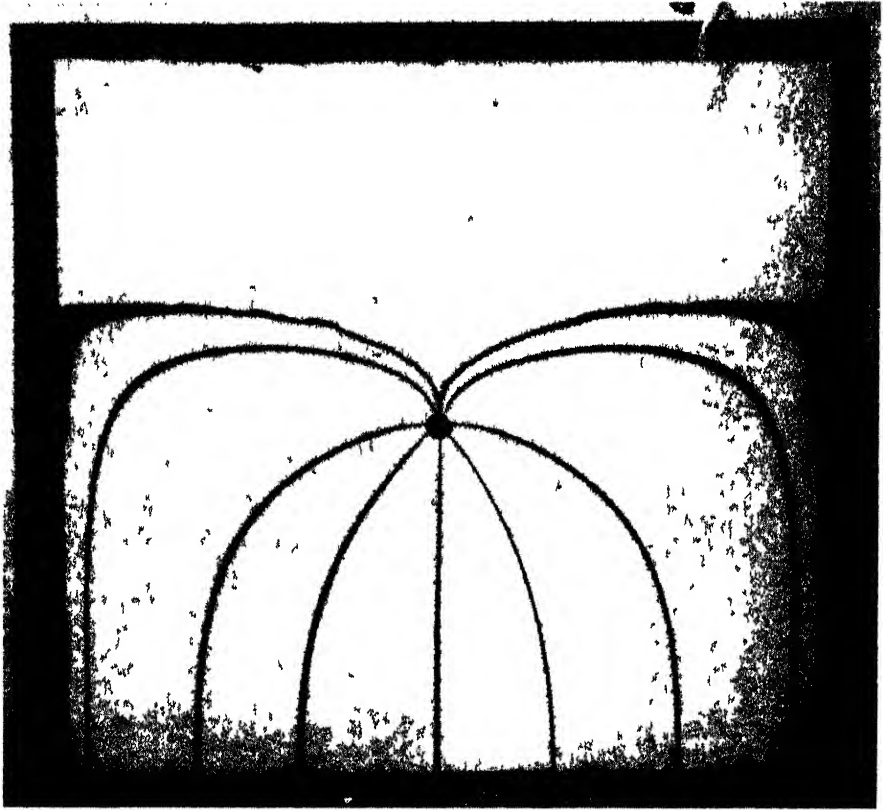


Fig. 60. Strömungsbild in Modell 3 bei Abfluss durch Ablauföffnung II

Tabelle 5.

Die Flächenlage bei dem Versuch an Modell 3.

Versuch I. Ausströmung durch Öffnung III. $Q = 100 \text{ cm}^3/\text{sek.}$	$x \text{ cm}$ .....	25	15	5	2
	$y_1$ berechnet aus (104) cm	0.4	0.7	2.2	4.0
	$y$ gemessen. cm .....	0.3	0.7	2.3	4.3
Versuch II. Ausströmung durch Öffnung II. Die Messung links von der Öffnung durchgeführt. $Q = 50 \text{ cm}^3/\text{sek.}$	$x \text{ cm}$ .....	12.5	7.5	2.5	1.0
	$y_1$ berechnet aus (104) cm	0.2	0.3	1.1	2.0
	$y$ gemessen. cm .....	0.2	0.4	1.0	2.3
Versuch III. Ausströmung durch Öffnung I und III. Die Messung links von Öffnung II durchge- führt. $Q = 50 \text{ cm}^3/\text{sek.}$	$x \text{ cm}$ .....	12.5	7.5	2.5	1.0
	$y_1$ berechnet aus (104) cm	0.2	0.3	1.1	2.0
	$y$ gemessen. cm .....	0.3	0.4	1.2	2.0

Wie man sieht, zeigt die auf experimentellem Wege erhaltene Wasserfläche gute Übereinstimmung mit der theoretischen.

*Das Aussehen des Strömungsbildes.* In einer anderen Serie wurde das Aussehen des Strömungsbildes studiert. Dies geschah in der Weise, dass ein Färbemittel, Kaliumpermanganat oder Methylenblau, durch eine Reihe feiner Kapillaren am unteren Rande des Modellfaches eingeführt wurde, wodurch die durch die Kapillarenspitzen gehenden Stromlinien zur Abzeichnung gelangten. Die Abzeichnung war ausserordentlich scharf. Einige der erhaltenen Bilder werden in Figg. 59–61 gezeigt. Ein quantitativer Vergleich mit den theoretischen Bildern wurde nicht angestellt.

### c. Modellversuche mit Überschichtungsflüssigkeit.

Die obengenannten Modellversuche entsprechen der Grundwasserströmung bei sehr hoher Bodendurchlässigkeit. Um Modellströmungsbilder zu erhalten, die einer Grundwasserströmung bei niedrigeren  $k$ -Werten entsprechen, ohne gleichzeitig die Modelltiefe,  $d$ , geringer als 0,04 cm zu machen, was experimentelle Schwierigkeiten mit sich brachte, führte der Verfasser Versuche auch nach folgenden Prinzipien aus.

Wir nehmen an, dass wir bei einem der obengenannten Versuche in Modell 3 eine Flüssigkeit, die leichter als Wasser ist, sich aber mit ihm nicht mischt, über die Wasserfläche schichten. Eine einfache Überlegung auf Grundlage von (115) gibt an die Hand, dass längs der Wasserfläche der Ausdruck

$$\varphi = \frac{d^2}{12\eta}(\gamma - \gamma_1)h_1 \quad (121)$$

ist, wobei  $\gamma$  und  $\gamma_1$  das spezifische Gewicht des Wassers bzw. der überschichtenden Flüssigkeit und  $h_1$  die Höhenlage der Wasserfläche über einer Vergleichsebene ist, die anstatt (119) gelten wird. Im Modell kann folglich eine Strömung zustande gebracht werden, die formale Gleichheit mit einer Grundwasserströmung hat, wenn

$$k = \frac{d^2}{12\eta}(\gamma - \gamma_1) \quad (122)$$

ist.

Indem wir eine Überschichtungsflüssigkeit wählen, deren spezifisches Gewicht nur mit einem geringen Werte unter den des Wassers hinabgeht, können wir eine Modellströmung erhalten, die der Grundwasser-

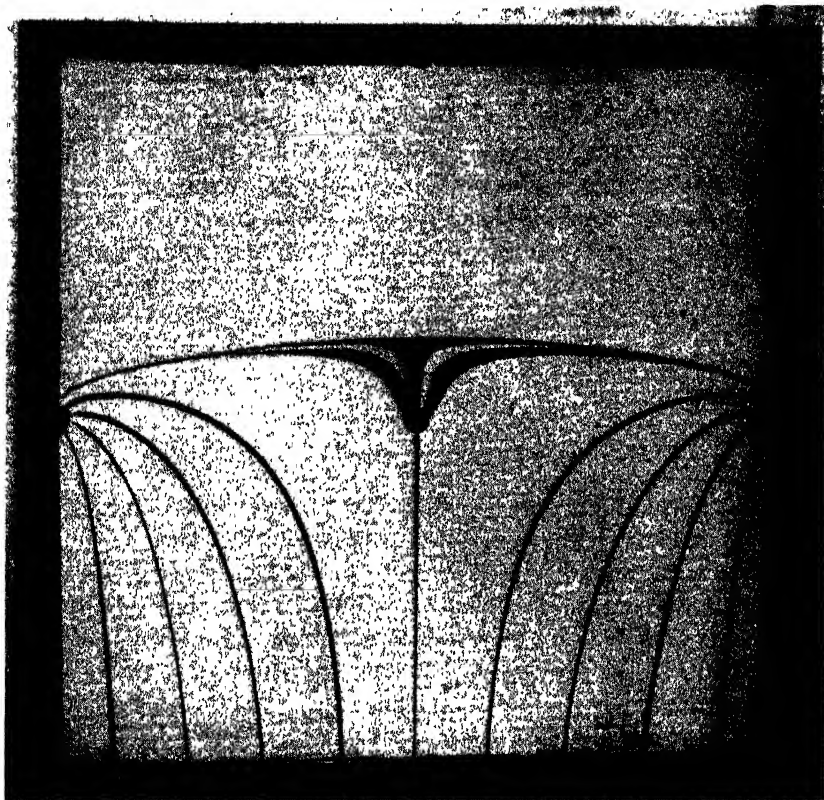


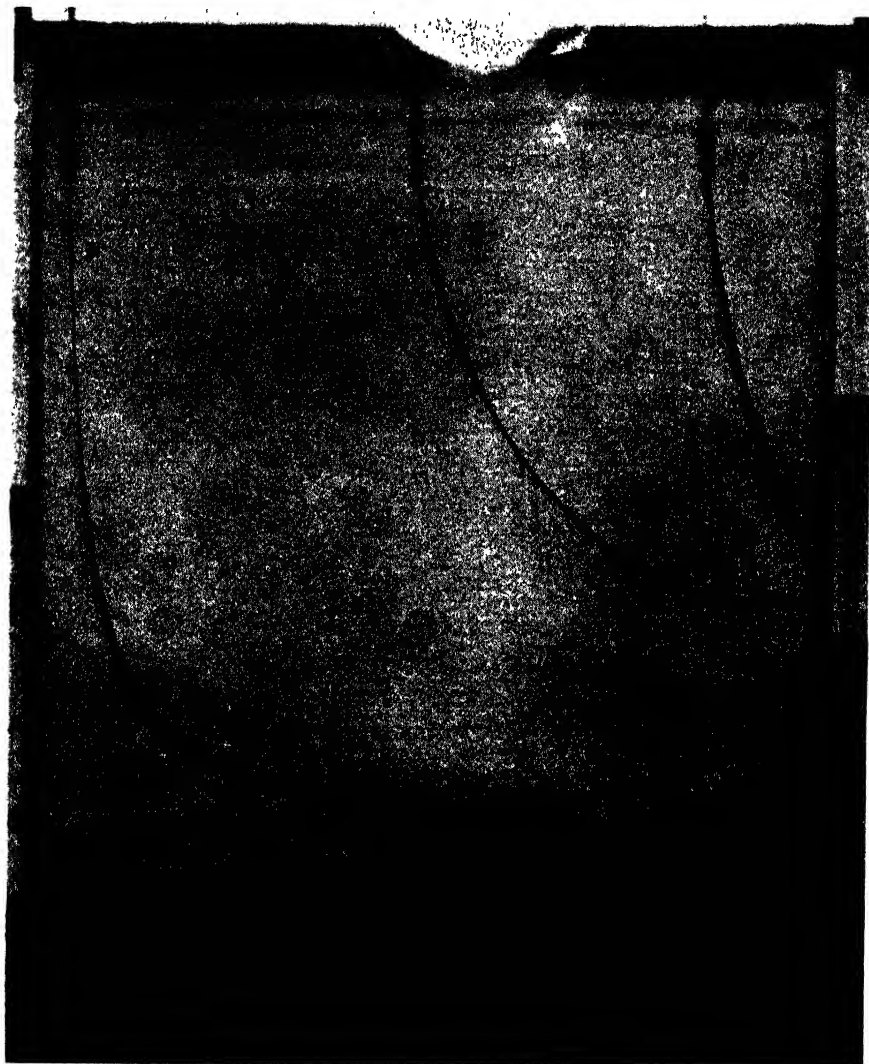
Fig. 61. Strömungsbild in Modell 3 bei Abfluss durch Ablauföffnung I und III.

strömung bei niedrigen Werten von  $k$  entspricht. Der Verfasser hat in Vorversuchen Proben mit Benzol ( $\gamma_1 = 0,878$  bei  $20^\circ \text{C}$ ) und Toluol ( $\gamma_1 = 0,866$  bei  $20^\circ \text{C}$ ) gemacht. Beide Flüssigkeiten erwiesen sich für den Zweck als ausserordentlich brauchbar und bildeten einen leicht zu beobachtenden und sehr scharfen Meniskus gegen das Wasser.

Tabelle 6.

Die Flächenlage bei dem Versuch an Modell 3, wo Überschichtungsflüssigkeit zur Anwendung kam.

$x$ , cm.....	25	15	5	2
$y$ , aus (104) berechnet...	0.4	0.8	1.2	4.3
$y$ , gemessen. ....	0.3	0.9	1.0	4.1



*Fig. 62.* Strömungsversuch mit Unterschichtungsflüssigkeit. Die Flüssigkeit ist Schwefelkohlenstoff, in dem Jod aufgelöst wurde. Das Ablaufloch befindet sich an der rechten Seite des Modells.

Der Verfasser hat in einem nach den angegebenen Grundsätzen angestellten Versuche und mit Anwendung von Benzol als überschichtender Flüssigkeit die Lage der freien Fläche im Vergleich zu einer aus (104) berechneten Lage studiert. Bei dem Versuche, der unter Anwendung der auf S. 118 angegebenen Arbeitsmethodik ausgeführt

wurde, war die Temperatur des Wassers und des Benzols  $20^{\circ}\text{C}$  und die Tiefe des Modellfaches,  $d$ , 0,04 cm. Da bei der genannten Temperatur  $\eta$  für das Wasser nach (7)  $10,30 \cdot 10^{-6}$  ist und das spezifische Gewicht des Wassers und des Benzols 0,998 bzw. 0,878 beträgt, so muss die in dem Modell entstehende Strömung nach (122) einer Grundwasserströmung bei  $k = 0,58 \text{ cm/sec}$  entsprechen. Die Ergebnisse des Versuches, bei welchem  $Q$   $10 \text{ cm}^2/\text{sec}$  betrug und die Ausströmung durch Öffnung III erfolgte, sind in Tabelle 6 zusammengestellt.

Wie man sieht, schliessen sich die erhaltenen Werte den berechneten gut an.

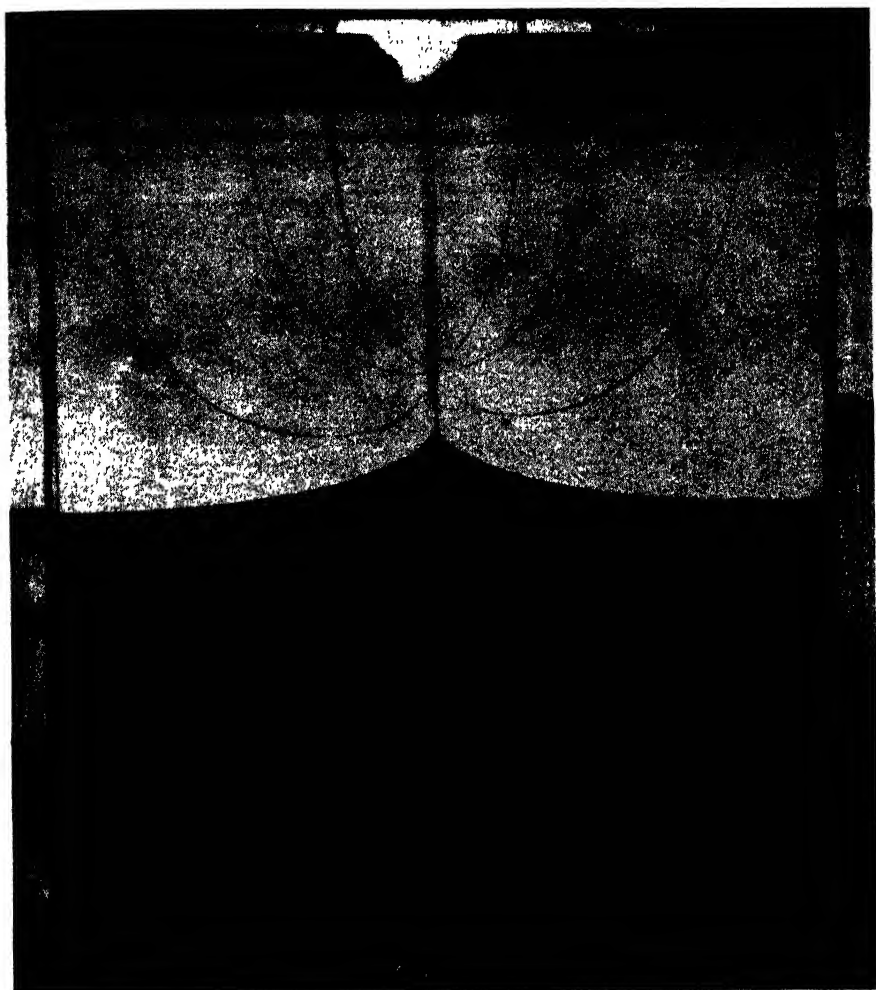
Modellversuche nach dem oben angegebenen Prinzip können ihrer technischen Ausgestaltung nach auch in anderer Weise ausgeführt werden. Wir nehmen an, dass wir das oben beschriebene Modellgefäss umkehren, so dass dessen nach aussen offene Seite nach oben zu liegen kommt, worauf wir das Gefäss völlig in Wasser hineinsenken. Hierauf lassen wir eine Flüssigkeit, die schwerer ist als Wasser und mit diesem sich nicht mischt, sich in einer Schicht auf dem Boden des Modells ausbreiten bis zu einem Niveau, das ein Stück unter den Öffnungen I—III liegt. Wird nun das Wasser durch eine oder durch einige der genannten Öffnungen herausgelassen, so wird die Grenzfläche zwischen Wasser und der unterlagernden Flüssigkeit gekrümmt sein. Längs derselben gilt dann

$$\varphi = \frac{d^2}{12\eta} (\gamma_1 - \gamma) h_1, \quad (123)$$

und der Strömung im Modell kann formale Gleichheit mit einer unter denselben Grenzbedingungen vor sich gehenden Grundwasserströmung gegeben werden, wenn

$$k = \frac{d^2}{12\eta} (\gamma_1 - \gamma) h_1 \quad (124)$$

ist. Es können verschiedene unterlagernde Flüssigkeiten angewendet werden. Der Verfasser hat in einem Vorversuche Trichloretylen ( $\gamma_1 = 1,477$  bei  $20^{\circ}\text{C}$ ) und Schwefelkohlenstoff ( $\gamma_1 = 1,261$  bei  $20^{\circ}\text{C}$ ) angewendet und fand dasselbe sehr brauchbar, da es einen leicht zu beobachtenden und scharfen Meniskus gegen das Wasser bildete. In den Figg. 62—63 werden zwei Bilder von diesen Vorversuchen gezeigt, die an einem provisorischen Modell ausgeführt wurden. In dem Schwefelkohlenstoff wurde Jod gelöst, um dasselbe sich beim Photographieren abgrenzen zu lassen. Indem in der früher beschrie-



*Fig. 63.* Strömungsversuch mit Unterschichtungsflüssigkeit. Die Flüssigkeit ist Schwefelkohlenstoff, in dem Jod aufgelöst wurde. Die Ablauföffnung ist in der Mitte des Modells.

benen Weise mittels Büretten Kaliumpermanganat eingeführt wurde, wurden Stromlinien erzielt.

Es scheint, als ob die eben beschriebenen Methoden, Modellversuche mit Hilfe zweier verschiedener Flüssigkeiten anzustellen, auch bei der Behandlung anderer technischer Grundwasserprobleme, z. B. der Durchströmung durch Erddämme, Anwendung finden könnten.

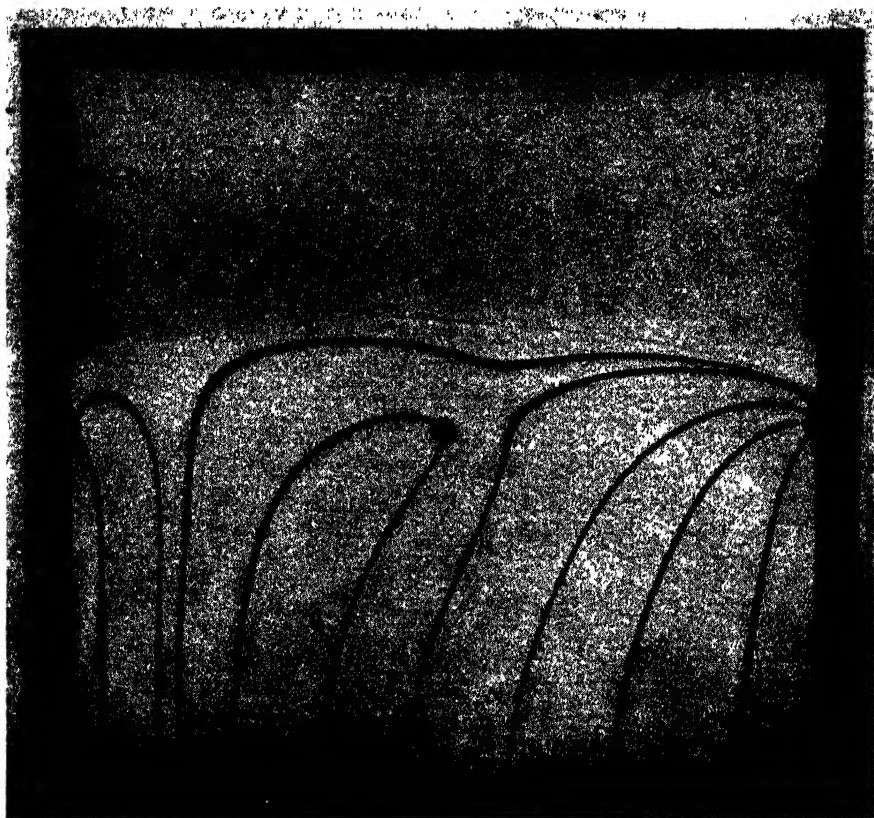




*Fig. 64. Strömungsbild in Modell 3 bei Ablauf durch Ablauföffnungen II und III. Die durch Ablauföffnung III ablaufende Wassermenge ist 4mal grösser als die durch Ablauföffnung II abgeleitete.*

***D. Strömungen, die einer analytischen Behandlung nicht zugänglich sind.***

Die Grundwasserströmung mit freier Fläche in gedräntem Boden durch Anwendung analytischer Methoden zu untersuchen, wie oben geschehen ist, scheint nur möglich zu sein, wenn die Strömungsbereiche der verschiedenen Leitungen durch ebene Flächen gegeneinander abgegrenzt sind. Ist das nicht der Fall, so dürften wir für unsere Untersuchungen allein auf Modellversuche angewiesen sein. Der Verfasser hatte keine Gelegenheit, dieses Gebiet genauer zu bearbeiten. Nur zwei Vorversuche wurden nach der auf S. 118 beschriebenen Methodik in Modell 3 mit freiem Wasser ausgeführt. Die Versuche gingen darauf



*Fig. 65.* Strömungsbild in Modell III bei Ablauf durch Ablauföffnung I, II und III. Die durch Ablauföffnung III ablaufende Wassermenge ist ca. 4mal grösser als die durch Ablauföffnung I und II abgehende.

aus, eine präliminäre Auffassung von dem Aussehen des Strömungsbildes bei von unten kommendem Zufluss zu einem Leitungssystem mit Leitungen von verschiedener Kapazität zu erhalten. Bei dem ersten der Versuche wurde das Wasser aus den Öffnungen II und III herausgelassen, wobei die per Zeiteinheit ausfliessende Menge in III viermal so gross war als in II. Das Aussehen des Strömungsbildes ergibt sich aus Fig. 64. In dem zweiten Versuche wurde das Wasser durch die Öffnungen I, II und III herausgelassen, wobei die per Zeiteinheit ausfliessende Menge in III ca. viermal so gross war als in I und II. Das Strömungsbild ist in Fig. 65 zu finden. Aus den Bildern ergibt sich, dass an der Oberseite von Leitungen mit geringerer Kapa-

zität das Wasser zu solchen mit grösserer Kapazität vorbeiströmt. Weiter ergibt sich, dass die Wasserfläche oberhalb von Leitungen, an denen das Wasser vorbeiströmt, allerdings nach unten ausgebaucht ist, dass aber diese Ausbuchtung nach unten in ihrem tiefsten Teile, anders als wir das in den von uns untersuchten Fällen früher gefunden haben, abgerundet ist. Die beiden ausgeführten Versuche haben nur vorläufigen Charakter.

#### IV. Einige Felduntersuchungen.

Die in dem Vorangehenden aufgestellten Sätze über die Bewegung des Wassers in gedräntem Boden haben wir teils durch Folgerungen erhalten, die von Darcys Satz ausgingen, teils durch Anstellung von Modellversuchen. Darüber hinaus hat der Verfasser gewisse Felduntersuchungen über den Strömungsverlauf ausgeführt. Im Folgenden ein Bericht über diese.

##### 1. Untersuchungsstellen.

Die genannten Felduntersuchungen sind vorzugsweise an sechs verschiedenen Stellen Schwedens ausgeführt worden, nämlich teils im Regierungsbezirk Uppsala auf Gelände, das zum Gute Ultuna in der Gemeinde Bondkyrko und zu Stora Kil in der Gemeinde Vänge gehört, teils im Regierungsbezirk Västerbotten auf Gelände, das zu Stöcksjö in der Landgemeinde Umeå und zu Bredvik in der Gemeinde Nordmaling gehört, sowie schliesslich auf einem Platze bei Olofsfors in der letztgenannten Gemeinde. Nachstehend eine Nähere Beschreibung der örtlichen Verhältnisse.

»1. Ultuna.« Die Untersuchungen wurden in einem Dränsystem auf einem Felde ausgeführt, das an der Reichsstrasse Uppsala—Stockholm ca. 1000 m südwest des Gutshofes und ca. 650 m südost der früheren Kötnerstelle Bäcklösa gelegen war. Die Bodenfläche des Systems hatte eine Neigung von ca. 2:1000 gegen Südosten, und die Bodenart, deren Zusammensetzung aus Tabelle 7 ersichtlich ist, bestand aus schwerem Ton. Das Dränsystem war 1890 ausgeführt worden, sein Zweiggrabenabstand betrug ca. 14 m, die Zweiggrabentiefe ca. 1,15 m.

»2. Ultuna.« Die Untersuchungen wurden in einem Dränsystem auf einem Felde ausgeführt, das ca. 1200 m südwest des Gutshofes gelegen war. Die Bodenfläche des Systems hatte eine Neigung von

Tabelle 7.  
Resultate der mechanischen Analyse des Bodens der Untersuchungsstellen.

Probe	Glühungsverlust, %, nach Trocknung bei 110°	Zusammensetzung der Mineralsubstanz				Bodenart	Probe	Glühungsverlust, %, nach Trocknung bei 110°	Zusammensetzung der Mineralsubstanz				Bodenart				
		Mittlerer Sand (2.0—0.2 mm), %	Mo (0.2—0.02 mm), %	Schluff (0.02—0.002 mm), %	Ton (<0.002 mm), %				Mittlerer Sand (2.0—0.2 mm), %	Mo (0.02—0.002 mm), %	Schluff (0.02—0.002 mm), %	Ton (<0.002 mm), %					
§1. Ultuna*																	
Profil I.	0—21 cm	9.1	2.3	10.0	35.1	52.1	Schwerer Ton	§4. Stöcksjö*	0—30 cm	8.1	13.2	45.1	39.0	2.0			
	21—80 *	6.3	4.4	9.1	33.1	53.0			30—45 *	4.5	9.9	56.8	18.2	14.9			
	80—120 *	6.1	6.0	7.2	24.3	61.1			45—110 *	3.1	12.2	49.6	41.4	16.8			
	* II.	0—19 *	3.2	13.0	24.9	57.9			* II.	0—20 *	8.8	15.6	50.0	30.9	3.2		
* III.	19—80 *	4.1	8.8	10.9	29.8	49.3	Schwerer Ton	§5. Bredvik*	20—45 *	2.7	11.1	62.7	22.2	1.6			
	80—120 *	5.6	0.1	13.0	27.6	59.6			40—120 *	1.9	4.1	57.9	27.6	9.9			
	0—20 *	11.7	0.0	20.2	18.6	61.0			Profil I.	0—20 cm	6.7	2.3	61.5	24.0	11.1		
	20—80 *	7.1	0.0	6.8	33.2	60.0				20—75 *	3.7	2.9	47.0	39.0	11.0		
80—120 *	4.1	0.0	8.9	30.0	59.8	Schwerer Ton	* II.	75—120 *	3.9	11.2	61.1	14.5	13.1				
	§2. Ultuna*																
	Profil I.	0—19 cm	9.9	4.1	12.1			25.5	57.3	Schwerer Ton	* III.	0—19 *	8.2	16.0	61.7	20.0	2.2
		19—80 *	7.8	1.4	4.9			31.3	62.0			19—75 *	4.2	14.8	59.3	18.8	7.0
80—130 *		7.7	7.4	6.6	16.2	69.4	75—130 *	5.3	19.0			50.1	16.5	14.0			
* II.		0—17 *	11.3	7.2	4.4	29.6	58.3	0—22 *	7.4			2.3	64.5	27.0	15.5		
17—90 *	6.5	9.7	11.0	27.7	51.1	Schwerer Ton	* III.	20—70 *	3.0	9.1	66.5	22.3	1.7				
	90—120 *	6.2	1.3	14.3	26.3			58.1	70—120 *	2.0	9.8	63.7	19.4	6.3			
	§3. St. Kille																
	Profil I.	0—24 cm	11.1	5.1	30.0			13.4	61.1	Schwerer Ton	§6. Olofsfors*	0—20 cm	6.3	14.6	70.3	10.1	4.9
24—90 *		8.0	8.2	12.4	18.6	59.6	Profil I.	20—65 *	4.0			14.6	71.8	9.1	3.1		
90—130 *		6.4	4.1	21.3	18.8	55.4	* II.	65—120 *	4.1			9.9	74.7	12.5	3.4		
* II.		0—17 *	10.4	0.0	22.0	19.4	59.1	0—20 *	12.1			12.3	80.8	6.0	0.1		
17—90 *	6.0	0.0	9.3	27.7	63.0	Schwerer Ton	* III.	20—70 *	10.2	10.1	81.8	4.3	3.1				
	90—120 *	6.0	0.2	18.0	29.9			51.4	70—120 *	4.7	13.2	79.3	7.1	0.9			
	0—20 *	13.6	0.2	8.0	32.0			59.4	Profil I.	0—20 cm	6.3	14.6	70.3	10.1	4.9		
	20—70 *	8.8	0.3	8.0	35.0			56.3		20—65 *	4.0	14.6	71.8	9.1	3.1		
70—120 *	5.6	2.9	4.0	34.8	58.3	Schwerer Ton	* II.	65—120 *	4.1	9.9	74.7	12.5	3.4				
									0—20 *	12.1	12.3	80.8	6.0	0.1			
								20—70 *	10.2	10.1	81.8	4.3	3.1				
								70—120 *	4.7	13.2	79.3	7.1	0.9				

ca. 2:1000 gegen Osten, und die Bodenart, deren Zusammensetzung aus Tabelle 7 hervorgeht, bestand aus schwerem Ton. Das Dränsystem war 1935 ausgeführt worden, sein Zweiggrabenabstand betrug 18 m, seine Zweiggrabentiefe ca. 1,15 m.

»3. Stora Kil.« Die Untersuchungen wurden in einem Dränsystem auf einem Felde ausgeführt, das ca. 1900 m nordöstlich des Gutshofes gelegen war. Die Bodenfläche in dem in Betracht kommenden Teil des Systems hatte eine Neigung von ca. 2:1000 gegen Südosten, und die Bodenart, deren Zusammensetzung sich aus Tabelle 7 ergibt, bestand aus schwerem Ton. Das Dränsystem war 1941 nach einem vom Verfasser aufgestellten Plan ausgeführt worden, der Zweiggrabenabstand betrug 18 m, die Zweiggrabentiefe ca. 1,05 m.

»4. Stöcksjö.« Die Untersuchungen wurden in einem Dränsystem auf einem Felde ausgeführt, das ca. 150 m westlich des Gutshofes gelegen war. Die Bodenfläche in dem in Betracht kommenden Teil des Systemes hatte eine Neigung von ca. 3:1000 gegen Osten, und die Bodenart, deren Zusammensetzung aus Tabelle 7 zu erschen ist, bestand aus schluffhaltigem Mo. Das Dränsystem war im Jahre 1934 ausgeführt worden, der Zweiggrabenabstand betrug 16 m, die Zweiggrabentiefe ca. 1,10 m.

»5. Bredvik.« Die Untersuchungen wurden in einem Dränsystem auf einem Felde ausgeführt, das ca. 150 m nördlich des Gutshofes gelegen war. Die Bodenfläche des Systems hatte eine Neigung gegen Norden von ca. 4:1000, und die Bodenart, deren Zusammensetzung Tabelle 7 zeigt, bestand aus schluffhaltigem Mo. Das Dränsystem war im Jahre 1937 ausgeführt worden, der Zweiggrabenabstand betrug 16 m, die Zweiggrabentiefe ca. 1,10 m.

»6. Olofsfors.« Die Untersuchungen wurden in einem Dränsystem auf einem Felde ausgeführt, das ca. 1000 m westlich des Ortes gelegen war. Die Bodenfläche des Systems hatte eine Neigung gegen Südosten von ca. 1:1000, und die Bodenart, deren Zusammensetzung aus Tabelle 7 hervorgeht, bestand aus Mo. Das Dränsystem war im Jahre 1941 ausgeführt worden, der Zweiggrabenabstand betrug 18 m, die Zweiggrabentiefe ca. 0,90 m.

## · 2. Durchlässigkeitsuntersuchungen.

An einigen der oben aufgezählten Untersuchungsstellen hat der Verfasser Untersuchungen vorgenommen, die über die Variationen der Durchlässigkeit des Bodens Aufschlüsse geben sollten.

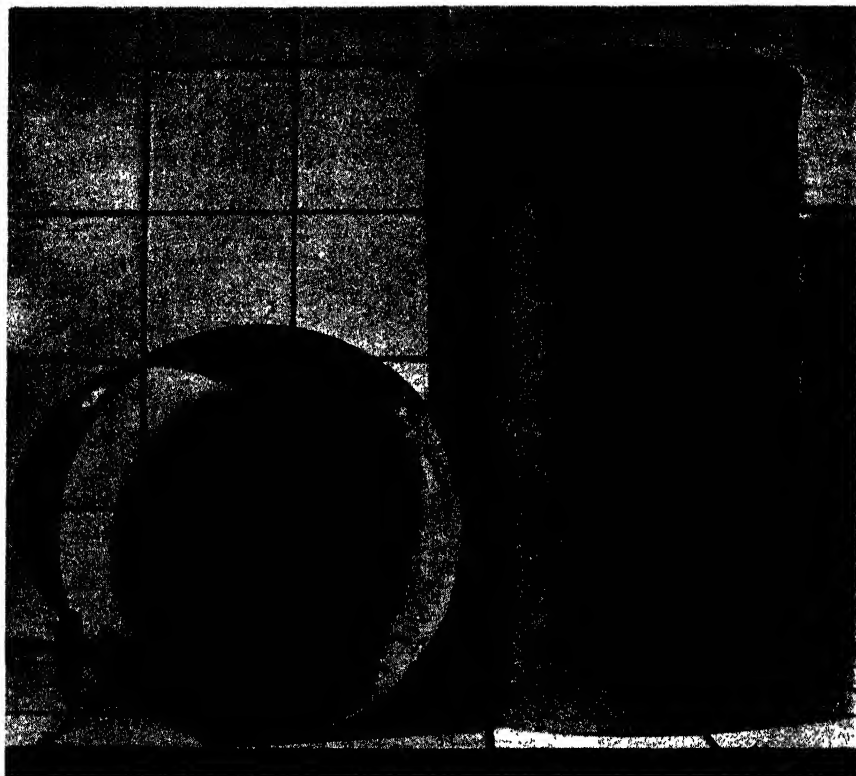
Die genannten Durchlässigkeitsuntersuchungen wurden hauptsächlich nach einer früher bereits von FLODKVIST (1931) angewandten Methodik ausgeführt. Als Apparat wurde ein aus Stahlblech hergestellter Zylinder ohne Boden angewandt, von 50 cm innerem Durchmesser und 50 cm Höhe (Fig. 66). Nachdem die Ackerkrume von der Untersuchungsstelle entfernt worden war, wurde der Zylinder dort durch die Bodenoberfläche bis 30 cm unter dieselbe eingetrieben. Hierauf wurde der Zylinder bis zum Rande mit Wasser gefüllt, worauf die Zeit,  $t$ , bestimmt wurde, die für das Sinken des Wasserspiegels um 15 cm notwendig war. Diese Grösse kann als ein Mass für die Durchlässigkeit des Bodens betrachtet werden.

**Untersuchung I.** Die erste Durchlässigkeitsuntersuchung wurde am 16. Oktober 1937 auf der Untersuchungsstelle »1. Ultuna« ausgeführt. Zur Zeit der Untersuchung war infolge von Niederschlägen ein Ablauf des Wassers aus dem Dränsystem im Gange. Nachdem mit Hilfe einer Eisensonde die Lage einer Dränleitung festgestellt worden war, wurden zunächst sieben Messungen gerade oberhalb der Leitung gemacht, dann zwei auf jeder Seite derselben, und zwar 1 m seitwärts einer in der Bodenfläche gerade oberhalb der Leitung gelegenen Linie und schliesslich zwei Messungen auf jeder Seite der Leitung 5 m von der genannten Linie. Die erhaltenen Ergebnisse zeigt Tabelle 8.

**Untersuchung II** wurde am 9. April 1938 an derselben Stelle ausgeführt wie Untersuchung I. Zur Zeit der Untersuchung war der Boden eben erst frostfrei geworden, und infolge der Schneeschmelze war ein Ablauf des Wassers aus dem Dränsystem im Gange. Bei der Untersuchung wurden zusammen 15 Messungen ausgeführt, und zwar auf Stellen verteilt, die zur Leitung in derselben Weise gelegen waren wie in Untersuchung I. Die erhaltenen Ergebnisse zeigt Tabelle 8.

**Untersuchung III** wurde am 26. Oktober 1943 auf der Untersuchungsstelle »3. Stora Kil« ausgeführt. Zur Zeit der Untersuchung war infolge von Niederschlägen ein Wasserablauf aus dem Dränsystem im Gange. Bei der Untersuchung wurden insgesamt 15 Messungen ausgeführt, auf Stellen verteilt, die im Verhältnis zu einer der Leitungen in derselben Weise gelegen waren, wie in Untersuchung I. Die erhaltenen Resultate ergeben sich aus Tabelle 8.

**Die Untersuchung IV** wurde am 14. April 1944 an derselben Stelle ausgeführt wie Untersuchung III. Zur Zeit der Untersuchung war der Boden eben frostfrei geworden, und infolge der Schneeschmelze war ein Wasserablauf aus dem Dränsystem im Gange. Bei



*Fig. 66.* Zylinder für Durchlässigkeitsuntersuchungen auf dem Felde.

der Untersuchung wurden insgesamt 15 Messungen ausgeführt, auf Stellen verteilt, die im Verhältnis zu einer Leitung ebenso gelegen waren wie in Untersuchung I. Die erhaltenen Ergebnisse sind aus Tabelle 8 ersichtlich.

Untersuchung V wurde am 16. Juni 1939 auf der Untersuchungsstelle »5. Stöcksjö« ausgeführt. Zur Zeit der Untersuchung war ein Wasserablauf aus dem Dränsystem im Gange. Dieser dürfte indessen nicht direkt von Niederschlägen verursacht gewesen sein, sondern durch einen von der Seite und von unten kommenden Grundwasserdruck. Die Ursache dieses Druckes dürfte der 300 m westlich des Geländes gelegene Stöcksjön gewesen sein, der von dem Gelände durch Kiesablagerungen eines Rullstensos und Sandablagerungen getrennt war und dessen Spiegel ca. 2,5 m höher lag als die Bodenfläche des Untersuchungsgebietes. Der Boden des Geländes war von 0,6 m unter

der Bodenfläche an bis nach unten hin völlig wassergefüllt. Bei der Untersuchung wurden insgesamt 9 Messungen ausgeführt, darunter 4 gerade oberhalb einer Leitung, drei von ihnen 1 m seitwärts einer in der Bodenfläche gerade oberhalb der Leitung gelegenen Linie, und schliesslich drei 5 m von der genannten Linie. Die erhaltenen Resultate sind aus Tabelle 8 zu ersehen.

Untersuchung VI wurde am 10. Juli 1943 auf der Untersuchungsstelle »6. Bredvik« ausgeführt. Zur Zeit der Untersuchung war infolge starker, an den vorausgegangenen Tagen erfolgter Niederschläge ein Wasserausfluss aus dem Dränsystem im Gange. Bei der Untersuchung wurden im ganzen 9 Messungen ausgeführt, auf Stellen verteilt, die im Verhältnis zu einer Leitung in derselben Weise gelegen waren wie in Untersuchung V. Die erhaltenen Ergebnisse zeigt Tabelle 8.

Untersuchung VII wurde am 9. Juli 1943 auf der Untersuchungsstelle »7. Olofsfors« ausgeführt. Zur Zeit der Untersuchung war infolge starker, vorausgegangener Niederschläge Wasserablauf aus dem Dränsystem im Gange. Die bei der Untersuchung ausgeführten insgesamt 15 Messungen waren auf Stellen verteilt, die im Verhältnis zu einer Dränleitung in derselben Weise gelegen waren wie bei Untersuchung I. Die erhaltenen Resultate gehen aus Tabelle 8 hervor.

Die Resultate der ausgeführten Untersuchungen ergeben für schweren Tonboden (Untersuchung I—IV), dass im Boden gerade oberhalb der Dränleitungen eine beträchtlich grössere Einflussgeschwindigkeit vorhanden ist als neben denselben (s. die Kolumne b—a und c—a in der Tabelle 8). Die Ergebnisse bestätigen die Resultate, die Flodkvist (1931) früher für ähnliche Bodenarten erhalten hat. Die Ursache des genannten Sachverhaltes ist, wie Flodkvist betonte, darin zu suchen, dass der umgegrabene Boden oberhalb der Dränleitungen grössere Durchlässigkeit hat als nicht umgegrabener Boden. Dass der umgegrabene Tonboden gerade oberhalb der Dränleitungen grössere Durchlässigkeit hat als nicht umgegrabener Tonboden, wird auch von einer Beobachtung bestätigt, die auf einem Boden von schwacher Neigung beim Austrocknen der Erde, besonders nach dem Wasserablauf im Frühling, allgemein gemacht werden kann. Es zeigt sich da, dass der Boden gerade oberhalb der Dränleitungen nach Verlauf eines oder einiger Tage wesentlich stärker ausgetrocknet ist und daher der Farbe nach heller erscheint als der Boden neben den Leitungen. Dies scheint seine Erklärung darin zu finden, dass infolge der schwachen Boden- neigung das Wasser nicht abläuft, sondern sich einige Zeit auf der



Tabelle 8.

Ergebnisse der Durchlässigkeitsuntersuchungen.

Untersuchung Nr	Unter- suchungs- stelle	Bodenart	Bei der Messung für <i>t</i> erhaltener Wert in Minuten															Unterschiede																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
			Gerade oberhalb einer Leitung			1 m von einer gerade oberhalb einer Lei- tung gelegenen Linie			5 m von einer gerade oberhalb einer Lei- tung gelegenen Linie																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														
			Einzelne Messungen									MTL (a)			Einzelne Mes- sungen			MTL (b)			Einzelne Mes- sungen			MTL (c)																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															

Pflugsohle des nicht umgegrabenen Bodens noch weiter hält, wodurch die Ackerkrume durchfeuchtet wird, während in dem umgegrabenen Boden alles freie Wasser rasch absinkt und die Austrocknung an der Oberfläche beginnt. Die Beobachtung kann am leichtesten von der Luft aus erfolgen, und sie ist u. a. im Zusammenhang mit flugphotogrammetrischen Arbeiten gemacht worden (THAM 1942, FAGERHOLM 1943). In Figg. den 67—68 werden zwei Bilder der Erscheinung gezeigt, die von flugphotogrammetrischen Arbeiten über Upland herstammen.

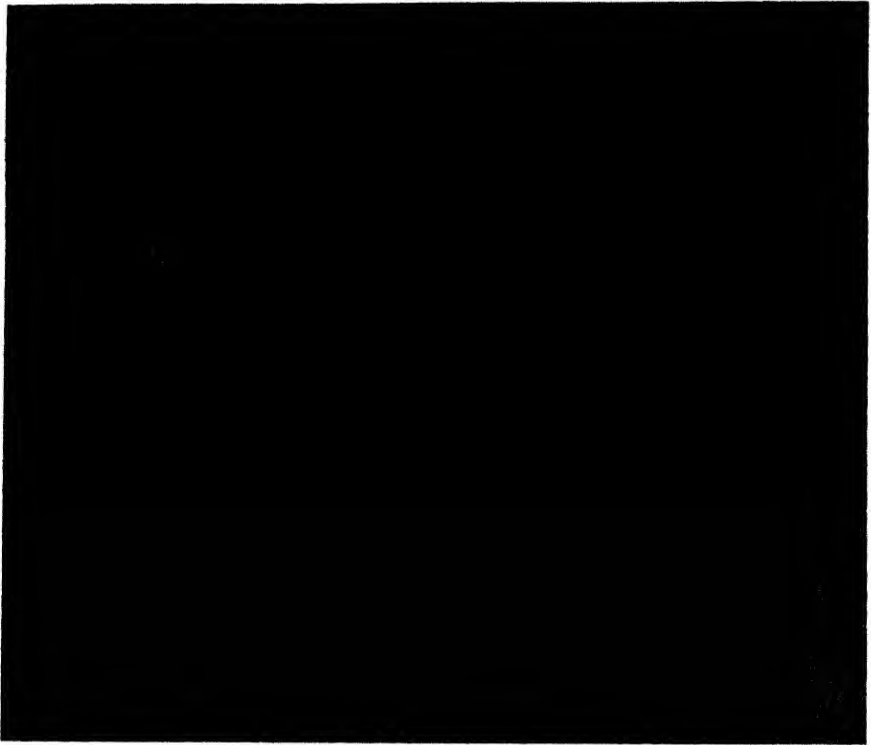
Aus dem eben über die Durchlässigkeitsverhältnisse im gedrännten Tonboden Gesagten dürfte man die Folgerung ziehen können, dass das im Boden sich zeigende Strömungsbild im Prinzip mit dem durch Modellversuche erhaltenen von Fig. 40 übereinstimmt.

Bei den Bodenarten Mo und schluffhaltiger Mo konnte bei den ausgeführten Untersuchungen (Untersuchung V—VII) eine grössere Einflussgeschwindigkeit gerade oberhalb der Leitungen im Vergleich zu der neben ihnen vorhandenen *nicht* nachgewiesen werden. In diesen Fällen scheint also der umgegrabene Boden oberhalb der Leitungen keine grössere Durchlässigkeit zu haben als der nicht umgegrabene Boden neben ihnen. Von den in ganz wassergefülltem Boden dieser Art sich ergebenden Strömungsbildern dürfte man daher erwarten können, dass sie den in Fig. 40 gegebenen Strömungsbildern entsprechen, die die Strömung in Boden von homogener Durchlässigkeit veranschaulichen.

### 3. Porositätsuntersuchungen.

Um die Durchlässigkeitsvariation im Tonboden noch weiter zu beleuchten, hat der Verfasser auch gewisse Bestimmungen des Volumens der luftgefüllten Poren in der Bodenmasse unmittelbar nach dem Ende einer Ablaufperiode ausgeführt. Die genannten Bestimmungen geben ein Mass für die Menge der grösseren Poren im Boden und sollten also, wie leicht einzusehen ist, auch ein Mass für die Durchlässigkeit des Bodens sein. Die Untersuchungen wurden nach einer von TORSTENSSON und ERIKSSON (1935) ausgearbeiteten und beschriebenen Methode ausgeführt. Dem natürlich gelagerten Boden wurden mit Stahlzylindern von ca. 700 cm<sup>3</sup> Volumen Proben entnommen, worauf das Volumen der luftgefüllten Poren in einem von den genannten Verfassern konstruierten Apparat, dem »Porosimeter«, bestimmt wurde.

Die genannten Untersuchungen wurden teils auf zwei verschiedenen Plätzen, a und b auf dem Versuchsgebiet »1. Ultuna« und teils auf »2. Ultuna« im Frühjahr 1938 unmittelbar nach dem Aufhören des



*Fig. 67—68. Flugaufnahmen gedrünter Felder teils bei Forkarby im Kirchspiel Bällinge, Reg. Bez. Uppsala, teils bei Svista in demselben Kirchspiel, am 15. Mai 1942 von 4000 m Höhe aufgenommen. Die stärkere Austrocknung des Bodens direkt oberhalb der Lei-*

Frühjahrswasserablaufes durchgeführt. Bei den Untersuchungen wurden Proben teils aus dem umgegrabenen Boden gerade oberhalb einer Leitung, 25 cm über dem oberen Rande der Leitungen, teils aus dem unumgegrabenen Boden 75 cm seitwärts der Leitung in derselben Tiefe genommen. Die erhaltenen Ergebnisse sind in Tabelle 9 zusammengestellt, in der die Zahlen das Volumen der luftgefüllten Poren in Prozenten des ganzen Volumens der Probe angeben.

Die Ergebnisse zeigen, dass in dem umgegrabenen Boden gerade oberhalb der Leitungen ein grösseres Volumenprozent luftgefüllter Poren vorkommt als in dem unumgegrabenen Boden neben denselben. Die Ergebnisse bestätigen also die oben gemachte Behauptung, dass der umgegrabene Tonboden grössere Durchlässigkeit hat als der unumgegrabene.



tungen hat zur Folge, dass diese Stellen sich als helle Linien abheben. Die Bilder stammen von den für Kartierungszwecke gemachten photographischen Aufnahmen des »Rikets Allmänna Kartverk«. Die Veröffentlichung geschieht mit Erlaubnis des genannten Institutes.

Die Erklärung dafür, dass das Volumen der luftgefüllten Poren unmittelbar nach einer Wasserablaufperiode in dem umgegrabenen Tonboden grösser ist als in dem unumgegrabenen, muss in der Bildung von Bodenkonkretionen beim Umgraben gesucht werden. Die genannte Konkretionsbildung ist also die eigentliche Ursache der höheren Durchlässigkeit des umgegrabenen Tonbodens. Geht man von diesem Standpunkte aus, so ist leicht einzusehen, dass bei umgegrabener Mo- und schluffhaltigem Mo eine grössere Durchlässigkeit im Vergleich zu unumgegrabener Boden der gleichen Art nicht konstatiert werden konnte, da in den genannten Bodenarten die Abwesenheit von Partikeln mit kittender Wirkung die Konkretionsbildung unmöglich macht.

Tabelle 9.

Ergebnisse der Porositätsuntersuchungen.

»1. Ultuna«, Leitung a			»1. Ultuna«, Leitung b			»2. Ultuna«		
Untersuchung Nr	Volumenprocente der luftgefüllten Poren in		Untersuchung Nr	Volumenprocente der luftgefüllten Poren in		Untersuchung Nr	Volumenprocente der luftgefüllten Poren in	
	umgegraben Boden	unumgegraben Boden		umgegraben Boden	unumgegraben Boden		umgegraben Boden	unumgegraben Boden
1	8.0	13.0	1	6.8	29.2	1	2.9	19.4
2	4.1	19.8	2	7.4	13.3	2	6.6	19.8
3	6.9	16.2	3	11.1	18.0	3	6.2	12.1
4	11.2	14.0	4	7.4	15.0	4	6.5	12.4
5	3.1	16.1	5	4.1	19.7	5	6.0	13.8
6	2.9	8.2						
Durchschnitt	6.0	14.5	Durchschnitt	7.4	19.1	Durchschnitt	5.6	15.5
Differenz 8.5			Differenz 11.7			Differenz 9.9		

#### 4. Strömungsuntersuchungen.

An einigen der oben beschriebenen Stellen hat der Verfasser Untersuchungen ausgeführt, die direkte Aufschlüsse über den Strömungsverlauf in dräniertem Boden verschaffen sollten. Diese Untersuchungen haben teils Versuche umfasst, die den Zweck hatten, mittels Einführung von Salz in den Boden Angaben über den Verlauf der Stromlinien zu erhalten, teils Messungen des bei der Strömung im Boden auftretenden Druckgefälles.

*Stromlinienuntersuchungen.* Die erstgenannte der obenerwähnten zwei Arten von Untersuchungen wurde teils bei »3. Stora Kil«, teils bei »7. Olofsfors« ausgeführt.

Bei »3. Stora Kil« wurden die Untersuchungen auf folgende Art ausgeführt. Nachdem durch Sondierung die Lage einer Zweigleitung festgestellt war, wurde gerade oberhalb derselben mit dem Spaten eine 10 cm breite, 30 cm tiefe und 4 m lange Furche parallel mit der Leitung ausgehoben. Am Boden der Furche wurde in gleichmässiger Verteilung 4 kg Kochsalz (NaCl) ausgelegt, worauf die Furche wieder mit Erde gefüllt wurde. Die gleiche Salzmenge wurde darauf in gleicher Weise in anderen Furchen ausgelegt, die 2,0 und 5,0 m von der erstgenannten Furche, in winkelrechtem Abstände vom Laufe der Leitung ge-

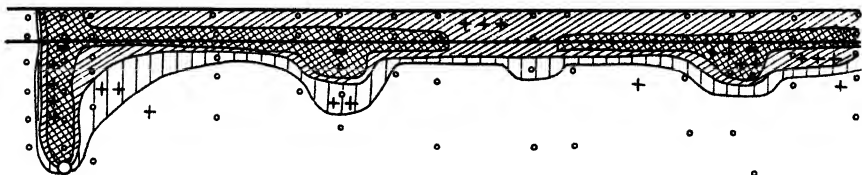


Fig. 69. Salzverteilung in einem in »3. Stora Kil« durch gedrännten Tonboden gelegtes Profil ein Jahr, nachdem das Salz an den durch schwarze Punkte angedeuteten Stellen ausgelegt wurde.

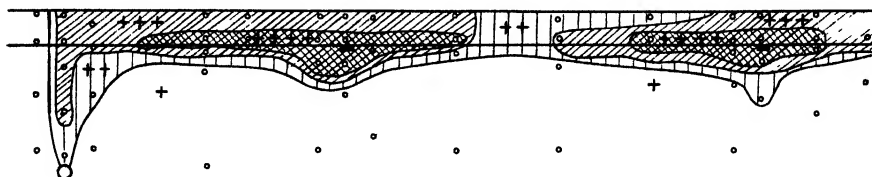


Fig. 70. Salzverteilung in einem in »3. Stora Kil« durch gedrännten Tonboden gelegtes Profil ein Jahr, nachdem auf den durch die schwarzen Punkte angedeuteten Stellen Salz ausgelegt wurde.

messen, gelegen waren. Die Arbeit wurde am 12. Oktober 1941 ausgeführt.

Am 4. September 1942, oder ungefähr ein Jahr später, wurden hierauf mit dem Bodenbohrer der um die Furchen gelegenen Bodenmasse Proben entnommen. Aus jeder Bodenprobe wurde ca. 5 g in ein Reagenzglas gebracht und in ca. 20 cm<sup>3</sup> destilliertem Wasser verschlämmt. Hierauf hatte der Boden einen Tag lang Zeit, sich aus der Lösung abzusetzen, worauf 10 cm<sup>3</sup> der darüber stehenden Flüssigkeit, die noch nicht klar war, in ein neues Reagenzglas gebracht wurde. Der Flüssigkeit wurde dann AgNO<sub>3</sub> zugesetzt, worauf die entstehende Fällung von AgCl beobachtet und ihre Stärke bewertet wurde. Diese Bewertung geschah nach folgender fünfgradiger Skala: 0 keine beobachtbare Fällung, + sehr schwache Fällung, ++ schwache Fällung, +++ starke Fällung, ++++ sehr starke Fällung. Die erhaltenen Ergebnisse wurden auf der Skizze eines senkrecht auf die Leitung gelegten Querschnittes durch die Bodenmasse am Ort der Probe eingezeichnet. Die Skizze ist in Fig. 69 zu finden. Die Absicht des Verfassers war es nun, durch das Studium der so eingetragenen Ergebnisse, die die Verteilung der Chloridionen in der Bodenmasse zeigten, Aufschlüsse über die Hauptstromrichtung des Grundwassers zu erhalten. Es ist indessen klar, dass solche Folgerungen nur mit grosser

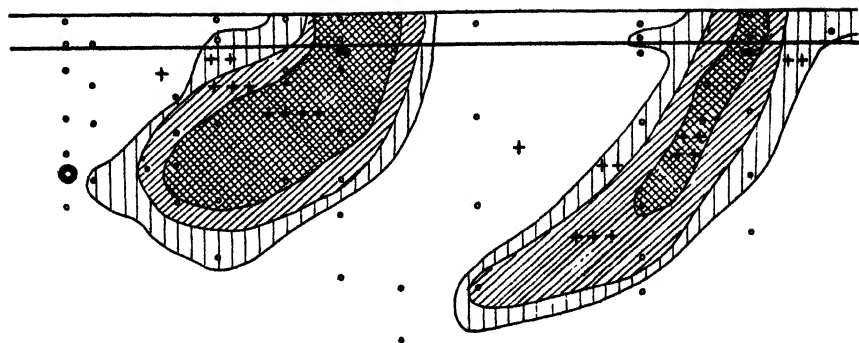


Fig. 71. Salzverteilung in einem in »7. Olofsfors« durch gedränten Moboden gelegtes Profil ein Jahr, nachdem auf den durch die schwarzen Punkte angedeuteten Stellen Salz ausgelegt wurde.

Vorsicht zu ziehen sind. Die für die Bestimmung der Chloridionenkonzentration angewandte Methode, die wegen ihrer leichten Verwendbarkeit auf dem Felde gewählt wurde, war somit natürlich mit Mängeln behaftet und enthält gewisse subjektive Momente. Ausserdem kann die Verteilung der Chloridionen in der Bodenmasse noch von anderen Umständen abhängig sein als von der Bewegung des Grundwassers, z. B. von der Bewegung des gebundenen Wassers und von der Diffusion. Trotzdem scheinen jedoch die Ergebnisse zu bezeugen, dass die Grundwasserbewegung hauptsächlich auf der Grenze zwischen Ackerkrume und Untergrund und in dem umgegrabenen Boden über der Dränleitung erfolgt. Eine Folgerung über den Verlauf der Stromlinien im Untergrund kann indessen nicht gezogen werden.

In der gleichen Zeit wie der eben beschriebene Versuch wurde 50 m entfernt noch ein zweiter auf demselben Felde ausgeführt. Der letztgenannte Versuch wurde in der gleichen Weise durchgeführt wie der erstgenannte, nur dass das Salz nicht direkt oberhalb der Leitung ausgelegt wurde. Das Ergebnis des Versuches ist in Fig. 70 zu finden. Aus ihm können die gleichen Folgerungen gezogen werden wie aus den Ergebnissen des obengenannten Versuches.

Ein dritter Versuch mit Anwendung von Salz wurde am 7. Juni 1943 auf »7. Olofsfors« durchgeführt, u. zw. in genau der gleichen Art wie der erste der oben beschriebenen. Die Untersuchung der Verteilung der Chloridionen wurde am 11. Juli 1944, d. h. ein Jahr später, ausgeführt. Der Boden hatte währenddessen in Weide gelegen. Das Ergebnis zeigt Fig. 71. Es ist ein ganz anderes als bei den beiden Versuchen in Tonboden, da wir hier konstatieren können, dass eine Strömung in bogenförmigen Linien durch den Untergrund erfolgt. Wir

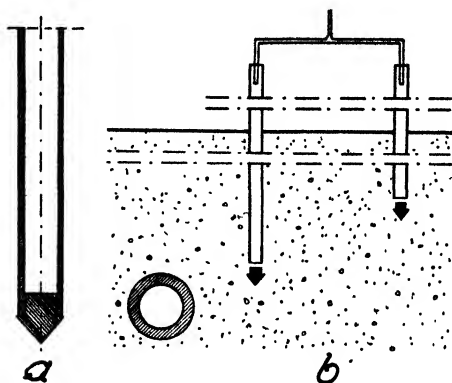


Fig. 72. Apparatur für Druckgefällsmessungen.

haben somit einen Beleg dafür bekommen, dass die Strömung in dieser Bodenart nach den Regeln vor sich geht, die oben für die Strömung in einem nach seiner Durchlässigkeit homogenen Boden aufgestellt wurden.

**Druckgefällsmessungen.** Eine Messung des bei der Strömung im Boden auftretenden Druckgefälles wurde bei »6. Bredvik«, »7. Olofsfors« und »3. Stora Kil« ausgeführt. Die Messungen gingen so vor sich, dass zwei Eisenröhren von 7 mm lichter Weite, die an dem einen Ende mit einem locker sitzenden Holzpfropfen nach Fig. 72 a versehen waren, in den Boden getrieben wurden, so dass die beiden Enden 50 cm voneinander zu liegen kamen (Fig. 72 b). Darauf wurden die Röhren 10 cm wieder aufgezogen, worauf die Pfropfen aus den Röhrenenden entfernt wurden und diese offen blieben. Die über der Bodenfläche gelegenen Röhrenenden wurden hierauf durch eine gläserne T-Röhre miteinander verbunden, worauf das Röhrensystem so stark entleert wurde, dass das Grundwasser in beide Schenkel der T-Röhre aufstieg und die Niveaudifferenz zwischen den Wasserspiegeln der Schenkel gemessen werden konnte. Die beobachtete Differenz stellte ein Mass des Druckgefälles im Boden dar.

Die Messungen bei »6. Bredvik« wurden am 11. Juni 1943 ausgeführt. Die Tage vorher war ein so starker Niederschlag gefallen, dass ein Wasserablauf aus dem Dränsystem im Gange war. Die Ergebnisse der Messungen sind in der linken Hälfte von Tabelle 10 zusammengefasst. Sie zeigen, dass in dem der Leitung zunächst gelegenen Teil der Bodenmasse ein Druckgefälle in der Richtung gegen die Leitung vorkommt. Das erwähnte Druckgefälle fand sich auch unter-



Tabelle 10.

## Ergebnisse der Druckgefällsuntersuchungen

»6. Bredvik«						»7. Olofsfors«					
Messung nr	Lage der einen Röhrenspitze		Lage der zweiten Röhrenspitze		Gemessene Druckdiff. cm	Messung Nr	Lage der einen Röhrenspitze		Lage der zweiten Röhrenspitze		Gemessene Druckdiff. cm
	cm unter der Bodenfläche	cm von der Leitung entfernt	cm unter der Bodenfläche	cm von der Leitung entfernt			cm unter der Bodenfläche	cm von der Leitung entfernt	cm unter der Bodenfläche	cm von der Leitung entfernt	
1	95	20	55	70	0.8	1	95	20	55	70	3.2
2	110	20	110	70	1.2	2	110	20	110	70	3.1
3	125	20	155	70	0.3	3	125	20	155	70	0.8
4	130	20	180	70	0.6	4	130	20	180	70	1.4
5	85	85	45	35	1.2	5	185	35	45	85	1.3
6	110	85	110	35	1.9	6	110	35	110	85	1.9
7	135	85	170	35	0.1	7	135	35	170	85	0.0
8	125	85	145	35	0.3	8	125	35	175	85	0.9

halb der Leitung, weshalb ein nach oben gerichteter Grundwasserstrom hier vorkommen muss. In grösserer Entfernung von der Leitung als 2 m konnte ein Druckgefälle nicht konstatiert werden. Es belief sich hier auf eine allzu geringe Grösse, als dass es mit der angewandten Apparatur hätte beobachtet werden können.

Die Messungen bei »7. Olofsfors« wurden am 12. Juli 1943 ausgeführt. Auch hier war die vorangehenden Tage ein so starker Niederschlag gefallen, dass aus dem Dränsystem ein Wasserablauf im Gange war. Die Ergebnisse der Messungen sind in der rechten Hälfte der untenstehenden Tabelle zusammengefasst; sie zeigen in dieselbe Richtung wie die Resultate der Messungen bei »6. Bredvik«.

Die Messungen bei »3. Stora Kil« wurden teils am 16. Oktober und 3. November 1942 ausgeführt, wo infolge von Niederschlägen Wasserablauf aus dem Dränsystem vorkam, teils am 2. Mai, wo Wasserablauf infolge von Schneeschmelze im Gange war. Bei den ersten beiden Messungen konnte Grundwasser aus dem Boden nicht aufgezogen werden. Bei der letztgenannten Messung konnte es nur in drei Fällen und mit einer Röhre geschehen, sonst überhaupt nicht. Die Schwierigkeiten dürften in der geringeren Durchlässigkeit des Bodens ihren Grund gehabt haben. Irgendwelche Werte für das Druckgefälle waren also nicht zu erhalten.

Die ausgeführten Druckgefällsmessungen ergaben also, dass in Mo-Boden und in schluffhaltigem Mo in der Nähe der Leitung, auch

auf ihrer Unterseite, ein gegen die Leitung gerichtetes Druckgefälle festgestellt werden konnte. Die Ergebnisse stellen einen weiteren Beleg dafür dar, das die Strömung in den genannten Bodenarten nach den Regeln vor sich geht, die oben für die Wasserbewegung in einem nach seiner Durchlässigkeit homogenen Boden aufgestellt wurden.

In Tonboden konnten keine Druckgefällsmessungen ausgeführt werden.

## V. Luftströmung in gedräntem Boden.

Im Zusammenhang mit den oben wiedergegebenen Untersuchungen über die Bewegung des Wassers in gedräntem Boden hat der Verfasser mit gleicher Methodik gewisse Untersuchungen über die Bewegung der Luft in gedräntem Boden ausgeführt. Diese letztgenannten Untersuchungen haben bisher nur geringeren Umfang, der Verfasser hat jedoch die Absicht, sie fortzusetzen und zu erweitern. Da aber die bereits erhaltenen Resultate im Zusammenhang mit den schon dargelegten Untersuchungen von Interesse sind, soll hier ein Bericht über sie gegeben werden.

In dem Masse, wie das Grundwasser die Poren eines gedränten Boden verlässt und abläuft, wird es in den Poren durch Luft ersetzt. Diese Luft kommt im Boden, ebenso wie das Grundwasser, in Bewegung, und dies ist — aus hier nicht weiter zu diskutierenden Gründen — von grundlegender Bedeutung für den Pflanzenbau.

Die Luftbewegung im Boden kann aus verschiedenen Ursachen entstehen. Zunächst kann sie auf *Unterschiede in der Konzentration* gewisser Luftbestandteile zurückgehen [s. z. B. ROMELL 1922, LUNDEGÅRD 1924] und kann also in Diffusionserscheinungen bestehen. Wir lassen im Folgenden diese Art von Bewegung unberücksichtigt. Zweitens kann die Bewegung von *Druckdifferenzen* verursacht sein. Diese können wiederum aus verschiedenen Ursachen entstehen. Sinkt oder steigt z. B. der Grundwasserspiegel im Boden, so entstehen Druckgradienten, und die Bodenluft kommt in Bewegung. Das gleiche geschieht, wenn bei Niederschlägen Sinkwasser dem Boden zugeführt wird. Ebenso entstehen Druckgradienten in der Bodenluft, wenn solche in der Atmosphäre unmittelbar über der Bodenfläche vorliegen. Schliesslich können Druckgradienten infolge von Temperaturunterschieden zwischen dem Boden und der Atmosphäre entstehen, z. B. wenn der Boden kälter ist als die Atmosphäre, wobei die Bodenluft abgekühlt wird und infolge ihrer vergrösserten Schwere durch die Dränleitungen »abläuft« und durch die Bodenfläche hindurch durch

wärmere Luft aus der Atmosphäre ersetzt wird. Die Grösse der entstehenden Druckgradienten und die Stärke der Strömung unter verschiedenen Bedingungen ist in verschiedenen Zusammenhängen diskutiert worden (BUCKINGHAM 1904, FRIEDENSDORFF 1912, ROMELL 1922, HJORT 1939, GUSTAFSSON 1939). Direkte Messungen der dahinströmenden Luftmengen haben JANERT & SCHÖNFELD (1934) ausgeführt. Unsere Kenntnis der genannten Grössen ist indessen noch sehr unvollständig.

Noch unvollständiger ist aber unser Wissen von dem genaueren Verlauf der durch Druckunterschiede verursachten Luftströmungen, da, soweit der Verfasser weiss, bis jetzt keine Untersuchungen darüber ausgeführt worden sind. Die Untersuchung des Verfassers hat das Ziel, den in Rede stehenden Verlauf zu beleuchten.

## 1. Grundgleichung für die Luftströmung durch den Boden.

So wie wir, sobald es sich darum handelt, die Grundwasserströmung im Boden zu untersuchen, von dem Zusammenhang zwischen Druckgefälle und dahinströmender Wassermenge Kenntnis haben müssen, in gleicher Weise müssen wir, sobald es gilt, die ebendort vor sich gehende durch Druckunterschiede verursachte Luftströmung zu erörtern, Kenntnis des Zusammenhanges zwischen Druckgefälle und dahinströmender Luftmenge haben. Wir müssen uns also für die Luftströmung einen Satz verschaffen, der dem Satze Darcys für die Wasserströmung entspricht.

Für laminare Gasströmung in geraden Leitungen gilt, wie durch eine einfache Überlegung gezeigt werden kann, das Gesetz von HAGEN-POISEUILLE. Bei der Strömung muss also direkte Proportionalität zwischen Druckgefälle und dahinströmender Gasmenge bestehen. Dass dies der Fall ist, haben experimentelle Untersuchungen in verschiedenen Zusammenhängen u. a. von MEYER (1866, 1873) gezeigt. Auch bei langsamer Gasströmung durch den Boden sollte folglich der Zusammenhang zwischen Druckgefälle und dahinströmender Luftmenge linear sein. Das ist durch verschiedene experimentelle Untersuchungen bestätigt worden (RENK 1879, FLECK 1880, WELITSCHKOWSKY 1883, AMMON 1883, WOLLNY 1893, KING 1899). *Bei Luftströmung durch den Boden gilt also für den Zusammenhang zwischen Druckgefälle und dahinströmender Luftmenge ein Satz von dem gleichen Charakter wie Darcys Satz (1) über die Grundwasserströmung.*

Für stationäre Luftströmung durch den Boden muss weiter die Kontinuitätsgleichung (11) gelten. Hieraus folgt, dass der oben abgeleitete

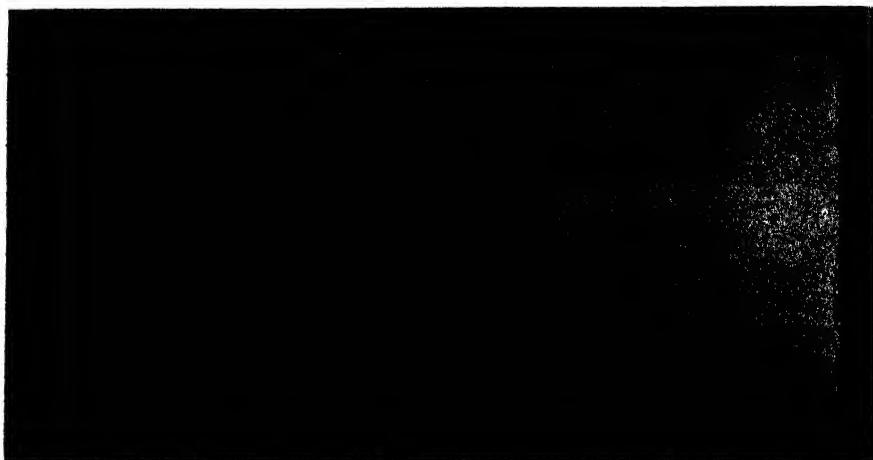
Ausdruck (12), der Grundgleichung der Grundwasserströmung genannt wurde, auch für die Luftströmung durch den Boden gültig ist. Ist dieser nach seiner Durchlässigkeit für Luft homogen, so bekommt die Laplacesche Gleichung (14) für die Strömung Gültigkeit.

## 2. Ausgeführte Untersuchungen.

Die oben gegebene Ableitung zeigt, dass die Strömungsbilder bei durch Druckunterschiede verursachter Durchströmung von Luft durch den Boden den Strömungsbildern bei Wasserdurchströmung ähnlich werden, wenn die Grenzbedingungen gleichartig sind.

Von diesem Ausgangspunkt aus betrachten wir folgenden Spezialfall. Ein Boden mit horizontaler Fläche und grosser Ausdehnung nach den Seiten hin sei durch untereinander parallele Leitungen gedränt, die in derselben Tiefe unter der Bodenfläche und in untereinander gleichem Abstand gelegt seien. Der Grundwasserspiegel im Boden sei horizontal und liege unter dem Niveau der Dränleitungen. Der Boden über dem Grundwasserspiegel sei luftdurchlässig, und die Durchlässigkeit für Luft in der ganzen Bodenmasse gleichartig. Wir nehmen an, dass zwischen der Bodenfläche und den Leitungen eine Druckdifferenz bestehe, z. B. dadurch entstanden, dass die Bodentemperatur niedriger sei als die Temperatur der Atmosphäre. Diese Differenz verursache eine Luftströmung. Die Strömung muss nach dem oben Gesagten ein Bild geben, das Fig. 18 entspricht.

Um das Gesagte experimentell zu bestätigen, hat der Verfasser folgenden Modellversuch ausgeführt. Nach denselben Prinzipien wie bei Modell 3 wurde ein nach oben offenes Modellfach gebaut, dessen Vorder- und Rückseiten aus Spiegelglas und dessen Schmalseiten aus Gummituch bestanden. Das Fach hatte die Innenmasse  $450 \times 225 \times 5$  mm. In der einen Spiegelglasscheibe befand sich ein als Ablauföffnung gebohrtes Loch, das mit seinem Zentrum 3,6 mm unter dem Oberrand des Modells und in der Mitte zwischen dessen beiden Schmalseiten lag. In das Loch wurde eine Glasröhre eingeschliffen. Das Modell wurde bis zu seiner oberen Kante mit Bodenmaterial IV (Tab. 2, S. 65) gefüllt, das vor seiner Einfüllung zunächst mit einer Lösung aus  $n/50$   $\text{AgNO}_3$  durchtränkt und dann bei  $50^\circ \text{C}$  im Trockenschrank getrocknet worden war. Hierauf wurde eine Luftsaugpumpe an die Ablauföffnung angekoppelt, und durch die Bodenmasse ein Luftstrom gesogen. Die entstehende Luftströmung sollte nun nach Fig. 18 verlaufen. Um den Stromlinienverlauf in dem Modell zu erhalten, hatte man durch ein unmittelbar an der Bodenfläche angebrachtes feines Mundstück Schwefelwasser-



*Fig. 73. Modellversuche für Untersuchung der Luftströmung in gedräntem Boden.*

stoff ausströmen lassen, u. zw. teils in einem Punkte gerade oberhalb der Ablauföffnung, teils auch 40, 80 und 160 mm links und rechts des genannten Punktes. Der Schwefelwasserstoff wurde von dem Luftstrom ergriffen und von ihm durch die Bodenmasse hindurchgeführt. Dabei wurde, weil die Bodenteilchen mit einer dünnen Schicht von  $\text{AgNO}_3$  überzogen waren,  $\text{AgS}$  auf diesen niederschlagen, wodurch der Boden dort, wo der Schwefelwasserstoff darüber hinströmte, dunkel gefärbt wurde. Die Stromlinien durch die Punkte der Bodenfläche, über die man den Schwefelwasserstoff einströmen liess, wurden auf diese Weise der Beobachtung zugänglich. Das Ergebnis des Versuches zeigt Fig. 73. Wie man sieht, zeigen die Stromlinien denselben bogenförmigen Verlauf wie in Fig. 18.

## VI. Zusammenfassung.

In dem ersten Teil der Arbeit wird eine allgemeine Darstellung des Vorkommens und der Bewegung des Wassers im Boden gegeben. Für die Grundwasserbewegung wird Darcys Satz als gültig angenommen. Dieser wird so umgeformt, dass er für eine mehrdimensionale Grundwasserbewegung gilt, wobei sich eine Grundformel, die Grundgleichung der Grundwasserbewegung genannt, ergibt.

Von der genannten Grundgleichung ausgehend, behandelt der folgende Abschnitt die Grundwasserbewegung in einem völlig wassergefüllten, nach seiner Durchlässigkeit homogenen gedränten Boden

unter verschiedenen Voraussetzungen. Die auf theoretischem Wege erhaltenen Ergebnisse werden durch Versuche an Bodenmodellen verifiziert. An Hand von Modellversuchen wird weiter die Grundwasserbewegung in einem völlig wassergefüllten, nach seiner Durchlässigkeit heterogenen gedränten Boden studiert.

Im nächsten Abschnitt wird die Grundwasserbewegung in einem teilweise wassergefüllten, nach seiner Durchlässigkeit homogenen gedränten Boden unter verschiedenen Voraussetzungen behandelt. Die Behandlung erfolgt teils auf theoretischem Wege durch Ausgehen von der oben genannten Grundgleichung, teils durch Anstellen von Modellversuchen mit freiem Wasser.

Der folgende Abschnitt gibt die Darstellung einiger ausgeführter Felduntersuchungen. Die Ergebnisse derselben bestätigen die Richtigkeit der auf theoretischem Wege und durch Modellversuche erhaltenen Untersuchungsergebnisse.

Das Schlusskapitel enthält eine Diskussion der Bewegung der Luft in gedräntem Boden, wobei gezeigt wird, dass der hier sich ergebende Strömungsverlauf der gleiche ist wie bei der Grundwasserströmung.

## Literaturverzeichnis.

- ADLERSPARRE, GEORG. 1940. Engelska sättet att leda vatten ifrån mossar och annan sank mark, efter Elkingtons grundsatser. Översättning och sammandrag. Stockholm.
- AMMON, G. 1880. Untersuchungen über die Permeabilität des Bodens für die Luft. Forsch. Geb. Agrikulturphysik 3, 209—241.
- BARTHEL, F. O. 1927. Effect of drains upon the ground water in coastal plain soils of North Carolina. Proc. 1st int. Congr. Soil Sci. Washington. 726—732.
- BESKOW, G. 1932. Tjälbildningen och tjällyftningen med särskild hänsyn till vägar och järnvägar. Sv. Geol. Unders. Årsbok. 26, No 3.
- BETZ, A. & PETERSOHN, E. 1931. Anwendung der Theorie der freien Strahlen. Ing.-Arch. 2.
- BRADFIELD, K. N. E., HOOKER, S. G. & SOUTHWELL, F. R. S. 1937. Conformal transformation with the aid of an electrical tank. Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 159, 315—346.
- BREITENÖDER, M. 1942. Ebene Grundwasserströmungen mit freier Oberfläche. Berlin.
- BREITENBACH, R. 1912. Die Bestimmung der Dränentfernung auf Grund der Hygroskopizität des Bodens. D. Kulturtechniker. 15, 177—210.
- BUCKINGHAM, E. 1904. Contributions to our knowledge of the aeration of soils. U. S. Dep. Agriculture. Bur. Soils. Bull. 25.
- . 1907. Studies on the movement of soil moisture. U. S. Dep. Agriculture. Bur. Soils. Bull. 38.
- CHILDS, E. C. 1936. The transport of water through heavy clay soils. I. III. J. Agric. Sci. 26, 114—127, 527—545.
- CHRISTOFFEL, E. B. 1867. Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie. Annali di Math. 1, 12—43.
- CHWOLSON, O. D. 1902, 1905, 1908. Lehrbuch der Physik. Bd I, III, IV: 1. Braunschweig.
- CLUTTERBUCK, J. C. 1845. On the theory of deep draining. J. Roy. Agr. Soc. Engl. 6, 489—493.
- COLDING, A. 1872. Om Lovene for Vandets Bevægelse i Jorden. Mém. Acad. Roy. Copenhague 5<sup>me</sup> sér. Classe d. Sci. 9.
- DACHLER, R. 1936. Grundwasserströmung. Wien.
- DARCY, H. 1856. Les Fontaines publiques de la ville de Dijon. Paris.
- DISERENS, E. 1930. Le laboratoire pour l'étude du sol et l'hydraulique agricole à l'école polytechnique fédérale. Proc. 2nd int. Congr. Soil Sci. Moskow. 6, 137—152.
- DONAT, J. 1935. Die Saugstrangentfernung bei Dränungen in Mineralböden. Wasserwirtsch. u. Techn. 2 (28), 207—211.

- DUPUIT, J. 1863. Étude théoriques et pratiques sur les mouvements des eaux à travers les terrains perméables. Paris.
- . 1865. Traité de la conduite et de la distribution des eaux. Paris.
- EHRENBERGER, R. 1928. Versuche über die Ergiebigkeit von Brunnen und Bestimmung der Durchlässigkeit des Sandes. Z. d. österr. Ing.- u. Archit.-Ver. 80, 71—77.
- EISENSTEIN, G. 1847. Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind. Crelles J. 35, 153—276.
- EKSTRÖM, G. & FLODKVIST, H. 1925. Hydrologiska undersökningar av åkerjord inom Örebro län. Sv. Geol. Unders. Årsbok 19, No 1.
- . 1927. Klassifikation av svenska åkerjordar. Sv. Geol. Unders. Årsbok 20, No 6.
- . 1938. Preliminärt förslag till jordvattnets terminologi. Nord. Jordbruksforsk. København. H. 4—7, 299—317.
- . 1941. Landbygdens försörjning med konsumtionsvatten. I. Grundvattnets förekomst och anskaffande. Kungl. Lantbruksakad. Handl. o. Tidskr. 80, 273—292.
- ENGELHARDT, J. H. 1932. Mitteilung über einen Versuch zur Ermittlung der Einwirkung der Dränung auf den Grundwasserstand und über den Dränungskoeffizienten. Trans. 6th Comm. int. Soc. Soil Sci. Groningen. A. 42—67.
- ENNEPER, A. 1890. Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. 2. Aufl. Halle.
- FAGERHOLM, E. 1943. Flygbildens användning för kartframställning. Ymer. 63, 182—201.
- FAUSER, O. 1929. Vorschläge für die internationale Ausgestaltung des Dränversuchswesens. Proc. int. Soc. Soil Sci. 3—4, 320—340.
- FLECK, H. 1880. Über ein neues Verfahren zu Durchlässigkeitsbestimmungen von Bodenarten. Z. f. Biol. 16, 42—54.
- FLODKVIST, H. 1922. Täckdikningens betydelse för vårt jordbruk. Kungl. Lantbruksakad. Handl. o. Tidskr. 61, 141—202.
- . H. 1931. Kulturtechnische Grundwasserforschungen. Sv. Geol. Unders. Årsbok. 25, No 4.
- . 1935. Agronomisch-hyrotechnische Ergebnisse von Dränungsversuchen auf Tonboden. Trans. 3rd int. Congr. Soil Sci. Oxford. 3, 164—168.
- & GUSTAFSSON, Y. 1938. Hydrologische Forschungen. 1. Studien über Grundwassereinströmung durch die Fugen der Dränleitungen. Lantbrukshögsk. Ann. 5. 131—164.
- FLÜGEL, K. 1928. Kritische Untersuchungen über die Theorien der Grundwasserbewegung und ihre Anwendung auf die vollkommenen Brunnen. Diss. Karlsruhe.
- FORCHHEIMER, PH. 1886. Ueber die Ergiebigkeit von Brunnenanlagen und Sickerschlitzten. Z. d. Archit.- u. Ing.-Ver. z. Hannover. 32, 539—564.
- . 1898. Grundwasserspiegel bei Brunnenanlagen. Z. d. österr. Ing.- u. Archit.-Ver. 50, 629—635, 645—648.
- . 1930. Hydraulik. 3. Aufl. Leipzig u. Berlin.



- FREDHOLM, O. 1941. Vattenavledning och invallning. Svenska Jordbrukets Bok. Stockholm.
- FRIEDENSDORFF, E. 1912. Ueber eine neue Methode der Bodendurchlüftung und ihre wissenschaftliche und praktische Bedeutung für die Landwirtschaft. Dtsch. Landwirtsch. Presse 39, 483—485.
- GARDNER, W., COLLIER, T. R. & FARR, D. 1934. Groundwater. I. Fundamental principles governing its physical control. Utah Agr. Exp. Sta. Bull. 252.
- GERBER, H. & ACHERET, J. 1928. Experimentelle Methoden zur Ermittlung von Potentialströmungsbildern. Escher-Wyss Mitt. 1.
- GERHARDT, P. 1891. Umgestaltung der Drängebauten von Längsdränagen zu Querdränagen. Centralbl. d. Bauverwaltung. 11, 221—223, 235—237, 244—245, 258—259.
- GIESECKE, F. 1930. Das Verhalten des Bodens gegen Luft. Handb. d. Bodenlehre, herausg. v. E. Blanck. 6, 253—342.
- GIRARD, M. 1816. Mémoire sur l'écoulement linéaire de diverses substances liquides par des tubes capillaires de verre. Mém. l'Acad. Sci. Inst. d. France. 187—274.
- GUSTAFSSON, Y. 1937. Om teorierna för vattnets bindning och rörelse i jord med särskild hänsyn till nyare forskningsresultat. Nord. Jordbruksforsk. København. H. 7—8 A, 225—239.
- —. 1938. Om materialtransporten i dräneringsledningar. Nord. Jordbruksforsk. København. H. 4—7, 723—732.
- —. 1939. I täckdikningsfrågan. II. Lantmannen Svenskt Land. 23, 543.
- —. 1940. The influence of temperature on the permeability of soils to water. Lantbrukshögsk. Ann. 8, 425—456.
- —. 1942. Något om dränering av åkerjord. Tidskr. Tegel. 1—10.
- —. 1942. Något om tegelrörsledningars vattentransporterande förmåga. Tidskr. Tegel. 18—22.
- HAGEN, G. 1839. Ueber die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren. Poggendorff's Ann. d. Phys. u. Chem. 46.
- . 1869. Handbuch der Wasserbaukunst. 3. Aufl. Berlin.
- HALLGREN, G. 1942. Dräneringsverksamhetens utveckling åren 1913—1937 enligt den officiella statistiken. Tidskr. Tegel, 10—18.
- . 1944. On the physical and chemical effects of saline irrigation water on soils. Lantbrukshögsk. Ann. 12, 23—48.
- HAMEL, G. 1934. Über Grundwasserströmung. Z. angew. Math. Mech. 14, 129—157.
- HAMEL, G. & GÜNTHER, E. 1935. Numerische Durchrechnung zu der Abhandlung über Grundwasserströmung. Z. angew. Math. Mech. 15, 255—265.
- HANNEMANN, D. 1870. Om Forholdet mellem Drainledningers indbyrdes Afstand og deres Dybde. Delacroix Forsøg og Theorie. Tidskr. f. Landøkonomie. 4. Række. 4, 81—102.
- HAYASHI, K. 1926. Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen. Berlin.
- HAVREZ, J. 1870. Recherches expérimentales des lois de la filtration. Revue universelle des mines. 35.
- HAZEN, A. 1892. The Filtration of public water supplies. New York.

- HELLSTRÖM, B. 1940. The subterranean water in the Libyan Desert. *Geograf. Ann.* 22, 206—239.
- HELMHOLTZ, H. 1868. Ueber discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. *Monatsber. Akad. Wissensch. Berlin.* 215—227.
- HJORT, C. W. 1939. I täckdikningsfrågan. *Lantmannen. Svenskt Land* 23, 438—439.
- HJULSTRÖM, F. 1935. Studies of the morphological activity of rivers as illustrated by the river Fyris. *Medd. Uppsala Univ. Geogr. Institut. Ser. A*, 10.
- HOLZMÜLLER, G. 1882. Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik. Leipzig.
- HOOGHOUDT, S. B. 1935. Die Beziehungen zwischen Wasserabfluss, Grundwasserstand, Dränentfernung und Wasserdurchlässigkeit. *Trans. 3rd int. Congr. Soil Sci. Oxford.* 1, 397—401.
- HORÁK, J. 1932. Gegenwärtiger Stand und bisherige Ergebnisse der Meliorationsforschung in der Tschechoslowakischen Republik. *Trans. 6th Comm. int. Soc. Soil Sci. Groningen.* A, 109—117.
- HUNTINGTON, E. W. 1918. *Handbook of mathematics for engineers.* London.
- »HUTTE«, *Des Ingenieurs Taschenbuch.* 26. Aufl. I. Berlin 1926.
- JANERT, H. & SCHÖNFELD, E. v. 1934. Die Luftströmung in Dränungen. *D. Kulturtechniker.* 37, 338—346.
- JANOTA, R. 1927. Ueber die Wirkung der Drainage auf die physikalische Beschaffenheit und den mechanischen Bau des Bodens. *Proc. 1st int. Congr. Soil Sci. Washington.* 726—732.
- JOHNSTONE, J. 1801. On account of the mode of draining land, according to the system practiced by Mr Joseph Elkington. 2nd Ed. London.
- KAUFMANN, W. 1931, 1934. *Angewandte Hydromechanik.* I, II. Berlin.
- KING, F. H. 1899. Principles and conditions of the movements of ground water. *U. S. Geol. Survey. 19th Rep. II,* 60—294.
- KIRCHOFF, G. 1869. Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. *Crelle's J.* 70, 289—298.
- KOPECKY, J. 1918. Neue Erfahrungen auf dem Gebiete der Bodenentwässerung mittelst Drainage. *D. Kulturtechniker.* 21, 9—24.
- KOZENY, J. 1927. Über Grundwasserbewegung. *Wasserkr. u. Wasserwirtsch.* 7, 67—70, 86—88, 103—104, 120—122, 146—148.
- . 1932. Hydrologische Grundlagen des Dränversuches. *Trans. 6th Comm. int. Soc. Soil Sci. Groningen.* A, 42—67.
- KRÜGER, E. 1911. Beitrag zur Theorie der Bodenentwässerung. *Mitt. Kaiser Wilhelms Inst. f. Landwirtsch.* 3.
- KRUL, J. M. 1933. Investigations sur les conditions géohydrauliques du sous-sol du Wieringermeerpolder. *Trans. 6th Comm. int. Soc. Soil Sci. Groningen.* B, 18—43.
- KUNGL. LANTBRUKSSTYRELSEN. 1940. Berättelse för år 1939.
- LAATSCH, W. 1938. *Dynamik der deutschen Acker- und Waldböden.* Dresden u. Leipzig.
- LAMB, H. 1932. *Hydrodynamics.* 6th Ed. Cambridge.

- LAPLACE, P. S. 1782. *Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure de planètes*. Mem. l'Acad. Sci. Inst. d. France. 113—196.
- LECLERC, I. M. J. 1860. *Handbuch der Drainage oder theoretische und praktische Anleitung zur Trockenlegung feuchten Bodens*. (Übersetzung v. W. Abel.) Brüssel u. Leipzig.
- LEWIS, M. R. 1932. Flow of groundwater as applied to drainage wells. Trans. Amer. Soc. Civil Engineers. 96, 1194—1206.
- LINDQUIST, E. 1933. On the flow of water through porous soil. — 1<sup>er</sup> Congr. grands Barrages. Stockholm.
- LEWENT, L. 1912. *Konforme Abbildung*. Leipzig u. Berlin.
- LUNDEGÅRD, H. 1924. *Der Kreislauf der Kohlensäure in der Natur*. Jena.
- MATTSON, S. 1932. The laws of soil colloidal behavior. VIII. Forms and functions of water. Soil. Sci. 33, 301—323.
- MERL, F. 1890. *Neue Theorie der Bodenentwässerung*. Ausbach.
- MEYER, O. E. 1866, 1873. Ueber die innere Reibung der Gase. Poggendorff's Ann. d. Phys. u. Chem. 127, 253—281, 353—382. 148, 1—44, 203—206.
- MILNE-THOMSON, F. 1939. *Die elliptischen Functionen von Jacobi, fünfstellig, für reelles Argument*. Berlin.
- MUSKAT, M. 1936. Seepage flux under dams of extended base width and under cofferdams on permeable strata of finite thickness. I. Physics. 7, 116—127.
- . 1937. *The flow of homogeneous fluids through porous media*. New York and London.
- MÜLLER, W. 1928. *Mathematische Strömungslehre*. Berlin.
- NEMÉNYI, P. 1933. *Wasserbauliche Strömungslehre*. Berlin.
- . 1934. Über die Gültigkeit des darcyschen Gesetzes und deren Grenzen. *Wasserkr. u. Wasserwirtsch.* 14.
- NICHOLSON, H. H. & CHILDS, E. C. 1936. The transport of water through heavy soils. II. J. Agric. Sci. 26, 128—141.
- NICHOLSON, H. H. 1935. The drainage properties of heavy clay soils. Trans. 3rd int. Congr. Soil. Sci. Oxford. 3, 385—388.
- OESTEN, G. 1879. Ueber Brunnen. J. Gasbeleuchtung u. Wasserversorgung. 22, 407—412, 452—458.
- OLSEN, M. 1944. Nyere Forskningsresultater indenfor Drænteknikken. Hedselskabets Tidskr. 65, 93—110.
- OSTWALD, W. 1925. Ueber die Geschwindigkeitsfunktion der Viskosität disperser Systeme I. Kolloid-Zeitschrift. 36: 1, 99—117.
- PAVLOVSKY, N. 1933. Wasserbewegung unter Dämmen. 1<sup>er</sup> Congr. grands Barrages. Stockholm.
- PEARSON, A. N. 1892. The effect of liming on the porosity of clay soils. Chem. News. 66, 53—54.
- PENNINGK, J. M. K. 1909. Über die Bewegung von Grundwasser. J. Gasbeleuchtung u. Wasserversorgung. 50, 69—79.
- POISEUILLE, J. L. 1843. Experimentelle Untersuchungen über die Bewegung der Flüssigkeiten in Röhren von sehr kleinem Durchmesser. Poggendorff's Ann. d. Phys. u. Chem. 58.
- PRINZ, E. 1919. *Handbuch der Hydrologie*. Berlin.
- RENK, F. 1879. Über die Permeabilität des Bodens für Luft. Z. f. Biol. 15, 205—242.

- REYNOLDS, O. 1883. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinous. Phil. Trans. roy. Soc. London. 174.
- RICHERT, J. G. 1911. Om Sveriges grundvattenförhållanden. Stockholm.
- RIEMANN, B. 1859. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Diss. Göttingen.
- ROBINSON, G. W. 1936. Soils, their origin, constitution and classification. 2nd. Ed. London.
- ROMELL, L.-G. 1922. Luftväxlingen i marken som ekologisk faktor. Medd. Statens Skogsförsöksanstalt. 19, 126—359.
- ROTHER, J. 1924. Die Strangentfernung bei Dränungen. Landwirtschaftl. Jahrb. 59.
- . 1930. Das Verhalten des Wassers in gedräntem Felde. Z. Pflanzenernährung, Düngung u. Bodenk. B 9, 512—518.
- ROŻAŃSKI, A. 1927. Der heutige Stand der Draintheorie für Mineralboden. Proc. 2nd int. Congr. Soil Sci. 635—662.
- . 1933. Tiefe und Abstand der Dränsauger in Mineralböden. Trans. 6th Comm. int. Soc. Soil Sci. Groningen.
- SCHAFFERNAK, F. & DACHLER, R. 1934. Das Widerstandsgesetz für die Wasserströmung durch Kies. D. Wasserwirtsch. 27.
- SCHILDER, L. 1933. Drei Klassiker der Stromungslehre: Hagen, Poiseuille, Hagenbach. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Leipzig.
- SCHLICK, W. J. 1927. The results of some studies of the flow of water through soils to underdrains. Proc. 2nd int. Congr. Soil Sci. 686—700.
- SCHWARZ, A. A. 1869. Ueber einige Abbildungsaufgaben. --- Crelle's J. 70, 105—120.
- SCOFIELD, R. K. & BOTHELDO DA COSTA, J. V. 1935. The determination of the pF at permanent wilting point and at the moisture equivalent by the freezing point method. Trans. 3rd int. Congr. Soil Sci. Oxford. 1, 6—10.
- SEELHEIM, F. 1880. Methoden zur Bestimmung der Durchlässigkeit des Bodens. Z. Analyt. Chem. 19.
- SETINSKI, V. 1932. Über die Beziehung zwischen der Drärentfernung, der Dräntiefe und der Durchlässigkeit des Bodens. Trans. 6th Comm. int. Soc. Soil Sci. Groningen. A, 42—67.
- SLICHTER, C. S. 1899. Theoretical investigation of the motion of ground waters. U. S. Geol. Survey. 19th Rep. II, 295—384.
- SMREKER, O. 1914. Das Grundwasser, seine Erscheinungsformen, Bewegungsgesetze und Mengenbestimmung. Leipzig u. Berlin.
- SOLNAR, O. 1930. Die Bewegung des Wassers im Boden und die Wirkung der Drainagen. Arb. d. landwirtsch. Forsch. inst. d. Cschëchoslow. Republik. 25. Forsch.-wesen auf d. Geb. d. Kulturtechn. 2.
- . 1938. Die Dränwirkung in der Trockenperiode. Trans. 6th Comm. int. Soc. Soil Sci. Zürich. B, 120—126.
- SPÖTTLE, J. 1911. Landwirtschaftliche Bodenverbesserungen. Handb. d. Ingenieurwissensch. 3. Leipzig.
- SVERIGES OFFICIELLA STATISTIK. Jordbruk med binäringar. Jordbruksräkningen 1937. Stockholm.
- TERZAGHI, K. 1925. Erdbaumechanik. Leipzig u. Wien.

- THAM, P. 1942. Äusserung bei einem Interview, veröffentlicht im Svenska Dagbladet vom 12. April 1942.
- THIEM, A. 1870. Brunnenergiebigkeit. — J. Gasbeleuchtung u. Wasserversorgung. 13, 450—467.
- TORSTENSSON, G. & ERIKSSON, S. 1935. Eine neue Methode zur Bestimmung der Porosität des Bodens. Lantbrukshögskolans Ann. 2, 159—179.
- VAGELER, P. 1936. pF-Wert und osmotischer Spannungsgradient als Mittel zur Beurteilung des Wasserhaushaltes des Bodens und Grundlage der Berechnung einer effektiven mittleren Korngrösse. D. Ernährung d. Pflanze. 32, 228—234.
- VAIDHIANATHAN, V. I., LUTRA, H. R. & BOSE, N. K. 1934. A hydrodynamical investigation of the subsoil flow from canal beds by means of models. Proc. Indian Acad. Sci. 1, 325—332.
- WALKER, M. 1933. Conjugate functions for engineers. A simple exposition of the Schwartz-Christoffel transformation applied to the solution of problems involving twodimensional fields of force and flux. London.
- WEINIG, F. & SCHIELDS, A. 1936. Graphisches Verfahren zur Ermittlung der Sickerströmung durch Staudämme. Wasserkr. u. Wasserwirtsch. 31.
- WEITSCHKOWSKY, D. v. 1884. Beitrag zur Kenntniss der Permeabilität des Bodens für Luft. Arch. f. Hyg. 2, 483—498.
- . 1884. Experimentelle Untersuchungen über die Permeabilität des Bodens für Wasser. Arch. f. Hyg. 2, 499—512.
- WHITTAKER, E. T. & WATSON, G. N. 1920. Modern Analysis. 3rd Ed. Cambridge.
- VINCENT, L. 1854. Die Drainage, deren Theorie und Praxis. Leipzig.
- VOLLNY, E. 1893. Untersuchungen über die Permeabilität des Bodens für Luft. Forsch. Geb. Agriculturphysik. 16, 193—222.
- VREEDENBURG, J. & STEVENS, O. 1933. Elektrodynamisch onderzoek van potentiaalstroomingen in vloeistoffen in het byzonder toegepast op vlakke grondwaterstroomen. D. Ingenieur. 48 B, 187—196.
- ZUNKER, F. 1921. Beziehung zwischen Bodenbeschaffenheit und Entfernung der Sauger von Dränungen. Landwirtschaftl. Jahrb.
- . 1928. Eignung der mechanischen Verfahren zur Bestimmung der Dränentfernung. D. Kulturtechniker. 31, 38—131.
- . 1930. Das Verhalten des Bodens zum Wasser. Handb. d. Bodenlehre, herausg. v. E. Blanck. 6, 66—220.
- . 1933. Ueber die Ursachen von Grundwasserstandsschwankungen. Trans. 6th Comm. int. Soc. Soil Sci. Groningen. B, 18—43.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort .....	1
I. Einleitung .....	3
II. Verschiedene Arten des Vorkommens von Wasser und seine Bewegungen im Boden .....	7
1. Verschiedene Arten des Vorkommens von Wasser im Boden	7
Das freie Wasser .....	8
Das gebundene Wasser .....	8
Das gegenseitige Mengenverhältnis zwischen freiem und gebun- denem Wasser .....	8
Die Art des Wasservorkommens im Boden und die Wirkung der Dränung .....	9
2. Die Bewegung des Wassers im Boden .....	10
A. <i>Strömung in völlig wassergefülltem Boden. (Grundwasserbewegung.)</i>	10
a. Darcys Satz .....	10
Ableitung und Gültigkeit .....	10
$k$ in Darcys Satz .....	16
Verallgemeinerung von Darcys Satz .....	17
Die Kontinuitätsgleichung .....	19
Die Grundgleichung der Grundwasserbewegung .....	20
b. Formale Gleichheit der Grundwasserbewegung mit gewissen an- deren Strömungen .....	20
c. Allgemeine Behandlung und Lösung des Problems der Grund- wasserströmung .....	23
Allgemeine Behandlung .....	23
Lösungsmethoden .....	24
Analytische Lösungsmethoden .....	24
Graphische Lösungsmethoden .....	27
Versuche an Bodenmodellen .....	28
Modellversuche mit freier Flüssigkeit .....	28
Modellversuche mit elektrischer Strömung .....	28
B. <i>Strömung in einem Boden, in dem freies Wasser nicht vorkommt</i>	29
III. Die Bewegung des Wassers in gedräntem Boden .....	31
1. Strömung in völlig wassergefülltem gedräntem Boden .....	31
A. <i>Strömung in völlig wassergefülltem gedräntem Boden mit homo-           gener Durchlässigkeit.</i> .....	31

	Seite
a. Theoretische Behandlung.....	31
Strömung, wenn nur eine vom Dränsystem bedingte Wasserbewegung vorkommt.....	32
Strömung zu einer einzelnen Dränleitung.....	32
Strömung bei grossem Abstand zwischen der Bodenfläche und einem nach unten hin begrenzenden undurchlässigen Lager.....	33
Strömung bei geringerem Abstand zwischen der Bodenfläche und einem nach unten hin begrenzenden undurchlässigen Lager.....	37
Strömung zu mehreren Dränleitungen.....	42
Strömungsbild bei grossem Abstand zwischen der Bodenfläche und einem nach unten hin begrenzenden undurchlässigen Lager.....	42
Strömungsbild bei geringerem Abstand zwischen der Bodenfläche und einem nach unten hin begrenzenden undurchlässigen Lager.....	47
Strömung, wenn auch eine andere, nicht vom Dränsystem bedingte Wasserbewegung (Primärströmung) vorkommt.....	52
Die Primärströmung ist eine vertikale Parallelströmung ..	53
Die Primärströmung ist eine mit der Bodenfläche parallele Strömung.....	55
b. Modellversuche.....	59
Apparatur.....	59
Bodenmaterial.....	63
Ausgeführte Versuche.....	65
Das Strömungsbild, das (58) entspricht.....	65
Das Strömungsbild, das (48) entspricht.....	68
Das Strömungsbild, das (66) entspricht.....	72
c. Diskussionen und Folgerungen.....	72
Die Abhängigkeit der abgeleiteten Wassermenge von verschiedenen Faktoren.....	73
Die Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit von verschiedenen Faktoren.....	77
B. <i>Strömung in völlig wassergefülltem gedräntem Boden mit heterogener Durchlässigkeit</i> .....	84
Kontinuierliche Änderung der Durchlässigkeit mit dem Orte...	84
Sprungweise Änderung der Durchlässigkeit mit dem Orte.....	85
2. Strömung in teilweise wassergefülltem gedräntem Boden ..	90
A. <i>Einleitung. Ältere Untersuchungen</i> .....	90
B. <i>Theoretische Behandlung</i> .....	96
a. <i>Allgemeine Grundlagen</i> .....	96

b. Einige Anwendungen.....	99
Von unten erfolgender Zufluss zu einem Dränsystem.....	100
Strömungsbild bei grossem Abstand zwischen der Ebene der Leitungen und dem Kieslager.....	101
Abbildungsfunktion.....	101
Der Grundwasserspiegel.....	106
Strömungsbild.....	108
Strömungsbild bei geringerem Abstand zwischen der Ebene der Leitungen und dem Kieslager.....	108
Von oben erfolgender Zufluss zu einem Dränsystem.....	110
Die Abhängigkeit des Strömungsbildes von der Kapillarität des Bodens.....	113
c. Modellversuche .....	114
a. Versuche an Bodenmodellen.....	114
b. Modellversuche mit freiem Wasser.....	114
Theoretische Grundlagen.....	115
Apparatur.....	116
Ausgeführte Versuche.....	119
Die Lage der Fläche.....	119
Das Aussehen des Strömungsbildes.....	121
c. Modellversuche mit Übersichtungsflüssigkeit.....	121
d. Strömungen, die einer analytischen Behandlung nicht zugänglich sind	126
IV. Einige Felduntersuchungen .....	128
1. Untersuchungsstellen .....	128
2. Durchlässigkeitsuntersuchungen .....	130
3. Porositätsuntersuchungen .....	135
4. Strömungsuntersuchungen .....	138
Stromlinienuntersuchungen.....	138
Druckgefällmessungen.....	141
V. Luftströmung in gedräntem Boden .....	143
1. Grundgleichung für die Luftströmung durch den Boden ...	144
2. Ausgeführte Untersuchungen.....	145
VI. Zusammenfassung .....	146





# Studies in the Variations of the Calory Content of Milk

By GERT BONNIER, ARTUR HANSSON and FOLKE JARL

Animal Breeding Institute, Wiad, Eldtomta, Sweden

## 1. Introduction.

In connection with the studies of monozygous twins carried on at the Animal Breeding Institute, regular chemical analyses have been made of milk specimens from these animals every 14th day, as described in an earlier article (BONNIER 1946). Among the animals whose milk was subjected to chemical analysis were also a number of dizygous twins. The purpose of these chemical analyses is to contribute to the general studies made at the Institute of the influence of environment on monozygous twins. The steadily increasing material from these analyses has been considered so valuable that there is every reason for working it out statistically. We have done so in the present paper, temporarily disregarding the studies on twins to be treated in a future article.

The chemical analyses have furnished data as to the fat, protein, lactose and ash content of the milk in question. These data together with the calory content reckoned from them, and registration details such as the number of the cow referred to in the analysis, the lactation week and year etc. were all punched on cards. The basic statistics were then compiled according to the Hollerith system. The present paper is only concerned with milk constituents furnishing energy i.e. fat, protein and lactose.

We owe a great debt of gratitude to Mr. T. DÜRING and to Mr. A. TACHAU of Copenhagen for their valuable help with these calculations.

## 2. Material.

The material on which the present paper is based includes complete chemical analyses of 2152 samples of milk with varying percentages of fat as appears from table 1.

*Table 1.*

Distribution of 2152 samples according to fat percentage together with the means of percents of fat, protein, lactose, and calories in each group of fat percentage.

Group of fat percentage	Number of samples	Mean within the group			
		percent fat	percent protein	percent lactose	calories
2.10—2.19	1	2.11	2.73	6.74	618
2.20—2.29	1	2.29	2.38	6.71	613
2.30—2.39	2	2.36	3.12	5.29	606
2.50—2.59	4	2.56	2.93	5.18	610
2.60—2.69	2	2.69	3.10	5.26	634
2.70—2.79	10	2.74	2.93	4.77	610
2.80—2.89	18	2.85	2.99	4.79	624
2.90—2.99	29	2.95	3.09	5.05	650
3.00—3.09	38	3.04	3.04	5.10	656
3.10—3.19	68	3.15	3.07	5.03	666
3.20—3.29	91	3.24	3.12	5.00	676
3.30—3.39	76	3.34	3.11	4.98	683
3.40—3.49	103	3.44	3.21	4.89	695
3.50—3.59	140	3.54	3.15	5.01	705
3.60—3.69	164	3.64	3.24	4.93	716
3.70—3.79	181	3.74	3.26	4.92	727
3.80—3.89	151	3.84	3.27	5.01	740
3.90—3.99	141	3.94	3.32	4.97	750
4.00—4.09	166	4.04	3.37	4.91	760
4.10—4.19	137	4.14	3.45	4.88	772
4.20—4.29	109	4.24	3.48	4.87	782
4.30—4.39	111	4.34	3.59	4.83	797
4.40—4.49	74	4.44	3.61	4.83	807
4.50—4.59	64	4.54	3.63	4.86	818
4.60—4.69	67	4.64	3.68	4.98	835
4.70—4.79	49	4.74	3.80	4.90	848
4.80—4.89	36	4.84	3.81	4.94	860
4.90—4.99	23	4.95	3.87	4.74	865
5.00—5.09	21	5.04	3.97	4.96	888
5.10—5.19	18	5.13	4.08	4.81	897
5.20—5.29	13	5.25	4.04	4.85	907
5.30—5.39	9	5.33	4.19	4.76	920
5.40—5.49	7	5.46	3.85	4.68	909
5.50—5.59	4	5.53	4.86	3.92	943

Group of fat percentage	Number of samples	Mean within the group			
		percent fat	percent protein	percent lactose	calories
5.60—5.69	3	5.63*	4.41	4.56	951
5.70—5.79	4	5.75	4.48	4.09	948
5.80—5.89	4	5.85	4.62	4.25	971
5.90—5.99	2	5.95	4.78	4.61	1 004
6.00—6.09	3	6.05	4.35	4.60	988
6.10—6.19	1	6.11	4.15	3.52	939
6.20—6.29	1	6.21	5.51	3.31	1 019
6.30—6.39	2	6.33	4.78	3.98	1 014
6.50—6.59	1	6.50	5.58	4.60	1 101
6.60—6.69	1	6.69	5.02	3.85	1 056
6.80—6.89	1	6.86	5.07	4.50	1 100
7.20—7.29	1	7.28	4.59	4.58	1 113
Total	2 152	3.941	3.381	4.923	751.7

### 3. The calory content as a function of the fat content.

The calory content of the constituents of milk has been determined on various occasions (ABDERHALDEN 1908, ANDERSEN 1926). We have used the results obtained by ANDERSEN according to which

1 g fat	contains	9.11 calories
1 » protein	»	5.86 »
1 » lactose	»	3.95 »

If the percentage of

fat	is designated by	$x$
protein »	»	$z$
lactose »	»	$u$

and the number of calories in 1 kilogramme milk is designated by  $y$ , then  $y$  equals the summarized values of  $x$ ,  $z$  and  $u$  according to the following formula:

$$y = 91.1 x + 58.6 z + 39.5 u. \quad (1)$$

It is these  $y$  values which were punched on cards. According to this procedure,  $y$  is a linear function of the three variables  $x$ ,  $z$  and  $u$ . Of these three variables, however, only  $x$  is easy to determine in practice, and then usually with the help of some type of butyrometer. The determination of  $z$  and  $u$  calls for actual chemical analyses. It was therefore for practical reasons important to try to express the

caloric value of  $y$  only as a function of the fat percentage  $x$ . For this purpose, various research workers have calculated the linear regression of  $y$  on  $x$ . If we also do the same for our 2152 milk samples, we have the following regression equation in which  $Y$  represents the calory value on the regression line:

$$Y = 304.88 + 113.36 x. \quad (2)$$

The following equations of ANDERSEN (1926) and GAINES and OVERMAN (1938) are mentioned here by way of comparison:  $Y = 300 + 113.5 x$  and  $Y = 304.8 + 114.1 x$ . All three functions of  $x$  agree very well with each other.

GAINES and DAVIDSON (1923) proposed measuring the energy content of milk by a unit other than the calory content. They introduced »1 unit of fat-corrected milk» (F. C. M.) as the number of calories in 1 kilogramme of milk with 4 % fat. The energy content of  $M$  units of milk with  $x$  % fat in this unit is  $M(0.4 + 0.15 x)$ . If in equation (2),  $x = 4$ , then,  $Y(4) = 758.32$ . If the right side of equation (2) is divided by this value, we obtain  $0.4020 + 0.1495 x$  which corresponds almost exactly to GAINES' and DAVIDSON's formula for fat-corrected milk.

To correctly express the calory content of 1 unit of milk as a linear function of  $x$  as in formula (2), it is necessary, as in the definition formula for calculating  $y$ , that the protein percent  $z$  and the lactose percent  $u$  also be linear functions of  $x$  or that the non-linear terms of  $z$  and  $u$ , expressed as functions of  $x$ , cancel each other in equation (1). If it is to be determined whether  $y$  follows  $x$  linearly, it should first be determined whether  $z$  and  $u$  follow  $x$  linearly. For this reason, we have divided our material up into groups of fat percents each with a grouping unit of 0.1 % (table 1).

*Regression of protein on fat.* In a test as to whether protein follows fat linearly, a statistical analysis of our material, divided up into 45 fat percent groups, gave the figures shown in table 2. The regression

Table 2.

Test of linearity of the regression of protein on fat.

	Degrees of freedom	Mean squares	Ratio of mean squares	1
Deviation from regression ...	44	0.3031	2.93	< 0.001
Within groups of fat percentages .....	2 106	0.1036		

is clearly not linear. A similar analysis was therefore made to see if the regression was quadratic. The statistics in table 3 show that the regression does not follow a quadratic curve but resembles the latter more than a straight line.

*Table 3.*

Test of the quadratic nature of the regression of protein on fat.

	Degrees of freedom	Mean squares	Ratio of mean squares	P
Deviation from regression ...	43	0.1774	1.71	< 0.01
Within groups of fat percentages .....	2 106	0.1036		

*Regression of lactose on fat.* Similar statistical analyses have also been made of the lactose content as a function of the fat content. Tables 4 and 5 show that the lactose content cannot be represented either linearly or as a quadratic function of fat. The deviations from the regression are almost equally great in the latter as in the former case.

*Table 4.*

Test of linearity of the regression of lactose on fat.

	Degrees of freedom	Mean squares	Ratio of mean squares	P
Deviation from regression ...	44	0.5190	2.60	< 0.001
Within groups of fat percentages .....	2 106	0.1998		

*Table 5.*

Test of the quadratic nature of the regression of lactose on fat.

	Degrees of freedom	Mean squares	Ratio of mean squares	P
Deviation from regression ...	43	0.5005	2.51	< 0.001
Within groups of fat percentages .....	2 106	0.1998		

Figure 1 shows the linear and quadratic regression of protein and lactose on fat. The crosses mark the mean values of the protein percentages and the dots the mean values of the lactose percentages in

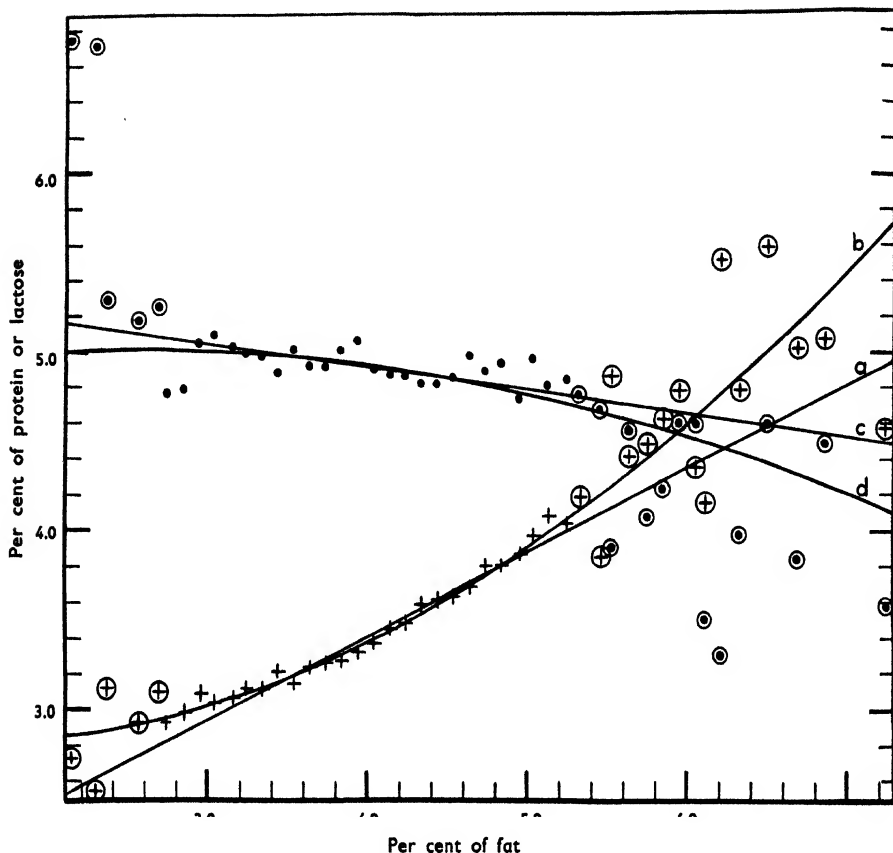


Fig. 1. Regression lines of protein percentage (a, linear; b, quadratic) and of lactose percentage (c, linear; d, quadratic) on fat percentage. Crosses = averages of protein percentages and dots = averages of lactose percentages for each tenth of percent of fat.

Circles mark those averages which are based on less than 10 samples.

each fat group. Crosses and dots within circles mark mean values based on less than 10 samples. The two regressions run in entirely different directions. It is therefore obvious that the calory content does not follow the fat content linearly. To prove this on the basis of the entire material would not yield more than tables 2 and 4 already show. But as the non-linear nature of the regressions may be suspected to depend on values within the very high and very low fat percentage groups, a direct analysis is made, omitting these very groups. This analysis is thereby confined to the 2.70–5.09 % fat range — a study from 2067 milk samples. The result is presented in table 6 and shows that the calory content per unit milk does not follow the fat

Table 6.

Test of linearity of the regression of calory content in one kilogramme of milk on fat percentage after exclusion of the very high and the very low fat percentages.

	Degrees of freedom	Mean squares	Ratio of mean squares	
Deviation from regression ...	22	971.59	1.95	< 0.01
Within groups of fat percentages .....	2 043	498.65		

Table 7.

Test of linearity within short intervals of fat percentages of the regression of calory content in one kilogramme of milk on fat.

Interval	Deviation from regression		Within groups of fat percentages		Ratio of mean squares
	Degrees of freedom	Mean squares	Degrees of freedom	Mean squares	
2.70—3.29	4	895.25	248	566.31	1.58
3.30—3.89	4	146.50	809	381.65	1 : 2.61
3.90—4.49	4	210.00	732	529.27	1 : 2.52
4.50—5.09	4	513.50	254	718.88	1 : 1.40

percentage linearly even when the lowest and highest fat percentages are excluded.

To see whether there were also significant deviations from linearity within more limited fat intervals, the fat percent range 2.70—5.09 was divided into 4 intervals, each with a width of 0.6 %. These in their turn were divided into groups with a width of 0.1 %. Table 7 analyzes each of the 4 intervals. Within the last three of these intervals, the mean square within the sub-groups is greater than the mean square of the deviations from the linear regression. In the first interval, the conditions are the reverse. But the ratio is so small, that this has no significance. Within the fat percent range with the narrow width of 0.6 %, the linearity is completely satisfactory.

It thus appears from the above that the linear regression-equation (2), calculated from our material, and the analogous equations calculated by other research workers, cannot satisfactorily show the relation between the calory content and the fat percent. This consequently also applies to the above-given formula for »fat-corrected milk». But although these differences are statistically significant, they are so slight that formula (2) or the formula for »fat-corrected milk» is fairly satis-



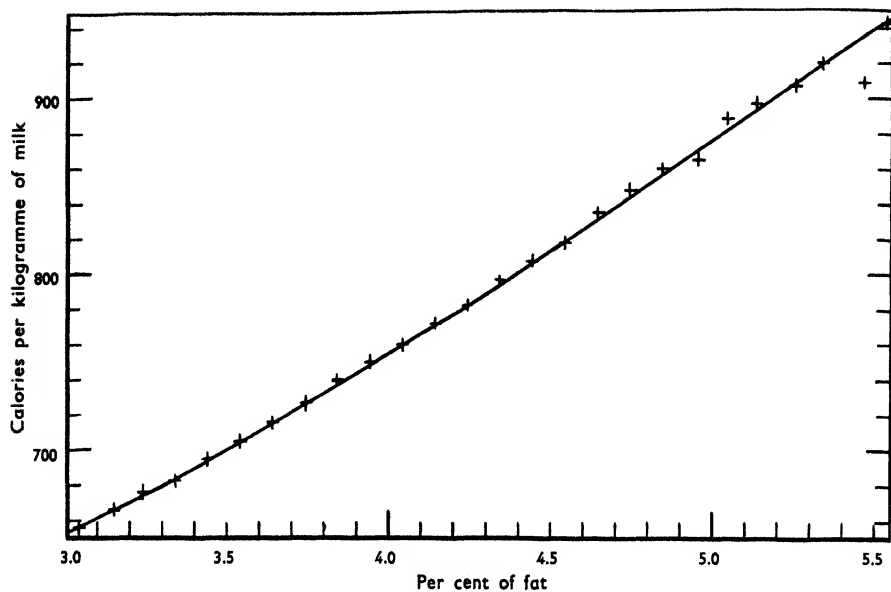


Fig. 2. Graphically smoothed curve showing the relation between content of calories per kilogramme of milk and percent of fat. Crosses mark averages of calories for each tenth of percent of fat.

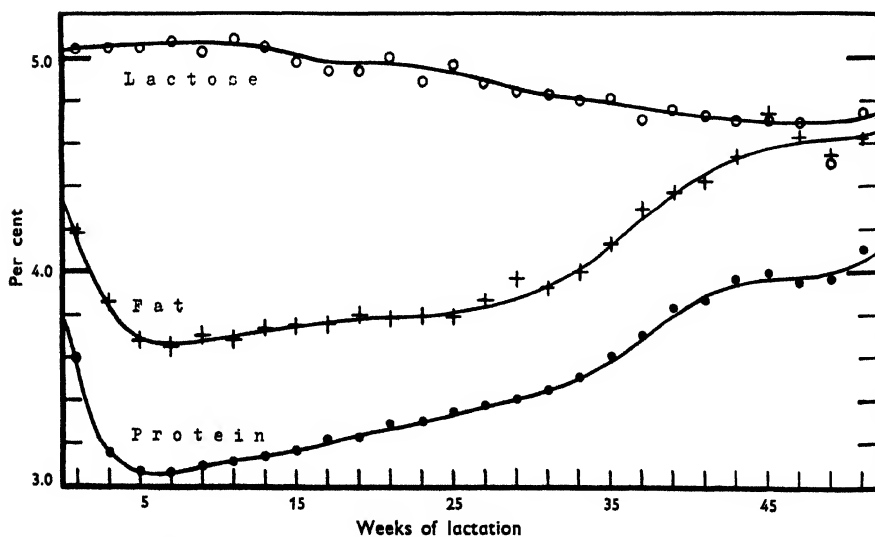


Fig. 3. Changes during lactation of percents of fat, protein, and lactose. Crosses = averages of fat percentages, dots = averages of protein percentages, circles = averages of lactose percentages within periods of 2 weeks

*Table 8.*

Adjusted values of Fat corrected Milk (cf. text).

Per cent fat	Amount F.C.M. in one unit milk	Per cent fat	Amount F.C.M. in one unit milk
3.00	0.862	4.30	1.045
3.10	0.875	4.40	1.061
3.20	0.889	4.50	1.077
3.30	0.902	4.60	1.091
3.40	0.915	4.70	1.110
3.50	0.928	4.80	1.127
3.60	0.942	4.90	1.143
3.70	0.956	5.00	1.160
3.80	0.971	5.10	1.177
3.90	0.985	5.20	1.195
4.00	1.000	5.30	1.212
4.10	1.016	5.40	1.228
4.20	1.030	5.50	1.245

factory for practical requirements i.e. for calculations of fodder schedules etc. Better results will be obtained, however, if instead of the linear regression, the calory average of every 0.1 % fat group is used directly. In this case, the values should be carefully worked out graphically as in fig. 2. If these averages are then divided by the calory value found in a similar manner for 4 % fat i.e. 755, the adjusted values of »fat-corrected milk» in 1 kilogramme milk are then found. These figures are arranged in table 8 for every tenth of a percent of fat. The amount of »fat-corrected milk» in *M* milk units is obtained by multiplying the figures in this table by *M*. In more meticulous scientific investigations, however, the calory content should be determined by direct calculating not only of fat but also of protein and lactose percents.

In view of the fact that the regressions are not linear, all calculations of ordinary correlation coefficients between the involved quantities, made by various research workers, appears to be of no interest.

#### 4. Variations in the protein and lactose percentages and in the calory content of 1 kilogramme milk during different lactation weeks.

We have also divided up our material according to the time elapsed since calving, grouping the milk samples in 4 week units. Considering

the regression of protein and lactose on fat, the well-known change in the fat percentage during lactation must also cause subsequent changes in the lactose and protein percents during lactation. There is no reason, however, of giving a detailed account here of the statistical analyses. Figure 3 gives only the mean values of the fat, protein and lactose percents obtained from our material during the different periods. Reference can be made to the following earlier investigations in this field: PRACKFELD (1905), VAN SLYKE (1908), PONICKI (1910), ECKLES and SHAW (1913), WITTERN (1933), REDER (1938), AZARME (1938).

### Summary.

1. A material of 2152 chemically analyzed milk samples (table 1) has been the basis of a statistical inquiry into the variations of the calory content.

2. It is shown that the regressions of protein percentage on fat percentage and lactose percentage on fat percentage are neither linear nor quadratic (tables 2-5, fig. 1). There is consequently no linear relationship between the caloric content of 1 unit of milk and the percentage of fat.

3. It is also shown that this non-linearity of the regression of calory content of one unit of milk on the fat percentage, still prevails when the lowest (below 2.70 %) and highest (above 5.09 %) fat percentages are excluded (table 6).

4. Consequently, GAINES' and DAVIDSON's method of calculating »fat-corrected milk» (1925) is not strictly correct. The adjusted values of »fat-corrected milk» are given (table 8, fig. 2).

5. It is, however, pointed out that within fat percentage-intervals of as narrow a range as 0.6 %, the regressions of the calory content on the fat percentage in one milk unit, are fully linear (table 7).

6. In the diagrams of figure 3, the average percents of fat, protein and lactose are shown during lactation.

### Literature cited.

- ARDERHALDEN, E. 1908. Text-book of physiological chemistry in thirty lectures. New York.
- ANDERSEN, A. C. 1926. Undersøgelser over Komælkens Sammensætning. Nordisk Jordbruksforskning, 133-145.
- AZARME, E. 1938. Variations in the protein content of milk during lactation. J. Dairy Res. 9, 121-146.
- BONNIER, G. 1946. Studies on monozygous cattle twins. I. General introduction. Acta Agr. Suecana 1, 139-145.
- ECKLES, C. H. & SHAW, R. H. 1913. Influence of the stage of lactation on the composition and properties of milk. U. S. Dept. Agr. Bur. Animal Ind. Bull. 155. Washington.
- GAINES, W. L. & DAVIDSON, F. A. 1923. Relation between percentages of fat content and yield of milk. Univ. Illinois. Agr. Exp. Stat. Bull. 245.
- & OVERMAN, O. R. 1938. Interrelations of milk-fat, milk-protein and milk-energy yield. J. Dairy Sci. 21, 261-271.
- PONICKI, B. VON. 1910. Neue Untersuchungen über die chemische Zusammensetzung der Kuhmilch. Diss. Breslau.
- PRACKFELD, F. 1905. Über den Gehalt der Kuhmilch an den einzelnen Bestandteilen im Verlauf der Laktation. Diss. Leipzig.
- REDER, R. 1938. The chemical composition and properties of normal and rancid Jersey milk. I. Chloride and lactose content. J. Dairy Sci. 21, 199-211. II. Fat, total solids and protein content. 249-260.
- SLYKE, L. L. VAN. 1908. Conditions affecting the proportions of fat and proteins in cow's milk. J. Amer. chem. Soc. 30, 1166-1186.
- WITTERN, K. 1933. Beiträge zur Kenntnis der Beziehungen zwischen dem Blutzuckerhalt, dem Milchzuckergehalt und der Milchmenge des Rindes. Diss. Berlin.



# Studies on Monozygous Cattle Twins

## VII. On the genetical determination of the interdependency between the percentages of fat, protein, and lactose in the milk.

By GERT BONNIER and ARTUR HANSSON

Animal Breeding Institute, Wiad, Eldtomta, Sweden

### 1. Introduction.

As described earlier (BONNIER 1946 a) the milk from the twins employed in the experiments performed at the Animal Breeding Institute is checked in different ways. Thus each separate cow's daily output is weighed and samples taken for ordinary tests of fat percentage (with a Gerber butyrometer). The amount of milk and fat produced by each separate cow is thus exactly known. Furthermore, the chemical composition of each cow's milk is determined fortnightly by preserving milk during three (or — from a later date — during four) consecutive days, the amounts of fat, protein, lactose, ash, and total dry matter thereby being determined. Of these the amount of lactose is determined indirectly as the difference between total dry matter and the other constituents, which are determined by direct chemical analyses. In a foregoing article (BONNIER, HANSSON, and JARL 1946) a statistical investigation has been made into the relations of the percentages of protein and lactose to the percentages of fat, and also into the relations of the total calories to fat percentages. No regard was there, however, paid to the twinship. It is the purpose of the present article to make a statistical analysis, with special regard to these twinships with the object of gaining some information concerning the genetical determination of the interdependencies which may exist between the percentages of fat, protein and lactose.

We are much indebted to Mr. T. DÜRING for his valuable help with the very laborious computational work.

## 2. Material.

The material consists of 2245 chemically analyzed milk samples from 29 twinpairs. The foregoing paper (BONNIER, HANSSON, and JARL 1946) was based on 2152 samples, most of which form part of the present 2245 samples.

When the twin experiments started, it was the purpose to parallel each identical pair with a fraternal pair of equal age which were to be subjected to the same feeding experiment. This plan, however, proved impracticable and was therefore subsequently discarded. But a number of the milk samples came from these dizygous pairs. In the case of three of the twin pairs, which at first were looked upon as identical, later we were — on morphological grounds — somewhat suspicious with regard to their monozygosity. In this paper they are labelled as »uncertain».

The twins were included in different feeding experiments. It is not our intention in this article to describe these experiments, but in order to test possible influence of feeding differences on the interdependencies in question, we grouped the twin pairs in 5 more or less homogeneous groups of feeding experiments as follows:

A. The two twins of each pair were fed according to equal norms prior to the first calving, but according to unequal norms thereafter. (Rather homogeneous group.)

B. The two twins of each pair were fed very differently prior to the first calving, but according to equal norms thereafter. (The growth and feeding of these animals are described in BONNIER and HANSSON 1946. Homogeneous group.)

C. The two twins of each pair were fed on foodstuffs of different grades of concentration and according to not quite equal norms. (Less homogeneous group.)

D. The two twins of each pair were fed according to equal norms, but the one was milked twice and the other three times a day. (Homogeneous group.)

E. There was, between the food rations of the two twins no great difference. (Less homogeneous group.)

Table 1 gives a full account of the twin pairs, to which of the above groups they belong, the number of samples from each cow, and the distribution of these samples on the different lactations. (Of the 3 »uncertain» pairs, 2 were included in the studies by JARL 1946. One of these pairs, nr 15–16, was there looked upon as fraternal, and one, nr 821–822, as identical.)

Table 1.

Milk samples tabulated according to twinships, feeding experiments (cf. text), and lactations.

Twinship	Twins Nr	Feeding experiment	Number of milk samples from lactation				
			1	2	3	4	Total
Identical . . . . .	4	A	25	18	24	1	68
	5		23	25	20	—	68
" . . . . .	8	A	23	21	3	—	47
	9		22	20	2	—	44
" . . . . .	106	A	25	—	—	—	25
	107		21	—	—	—	21
" . . . . .	115	A	19	—	—	—	19
	116		20	—	—	—	20
" . . . . .	818	A	23	13	—	—	36
	819		23	15	—	—	38
" . . . . .	119	B	19	19	2	—	40
	120		22	28	—	—	50
" . . . . .	123	B	14	—	—	—	14
	124		9	—	—	—	9
" . . . . .	201	B	26	—	—	—	26
	202		28	—	—	—	28
" . . . . .	203	B	14	—	—	—	14
	204		16	—	—	—	16
" . . . . .	205	B	25	—	—	—	25
	206		31	—	—	—	31
" . . . . .	207	B	30	—	—	—	30
	208		22	—	—	—	22
" . . . . .	209	B	20	—	—	—	20
	210		20	—	—	—	20
" . . . . .	213	B	26	—	—	—	26
	214		30	—	—	—	30
" . . . . .	215	B	21	—	—	—	21
	216		22	—	—	—	22
" . . . . .	725	C	22	20	24	22	88
	726		22	18	26	20	86
" . . . . .	921	C	22	6	—	—	28
	922		21	19	—	—	40
" . . . . .	117	D	22	—	—	—	22
	118		21	—	—	—	21
" . . . . .	121	D	18	—	—	—	18
	122		15	—	—	—	15
" . . . . .	823	E	30	19	20	12	81
	824		21	21	21	8	71
Total	19 pairs		833	262	142	63	1 300



Twinship	Twins Nr	Feeding experiment	Number of milk samples from lactation				
			1	2	3	4	Total
Uncertain .....	15	C	25	20	—	—	45
	16		30	20	—	—	50
" .....	716	C	26	23	23	—	72
	717		30	23	19	—	72
" .....	821	E	21	21	25	—	67
	822		23	25	26	—	74
Total	3 pairs		155	132	93	—	380
Fraternal .....	906	A	17	—	—	—	17
	907		17	—	—	—	17
" .....	915	A	21	—	—	—	21
	916		24	—	—	—	24
" .....	736	C	20	17	12	—	49
	737		25	17	—	—	42
" .....	757	C	27	28	—	—	55
	758		21	17	18	—	56
" .....	830	C	21	15	—	—	36
	831		22	17	—	—	39
" .....	647	E	23	26	1	—	50
	648		10	21	15	—	46
" .....	807	E	19	20	20	—	59
	808		18	15	21	—	54
Total	7 pairs		285	193	87	—	565
Grand total	29 pairs		1 273	587	322	63	2 245

### 3. Comparison between first and second lactation.

In table 1 it is seen that the samples from the different cows are not equally distributed on the different lactations. Thus, if there is a change from lactation to lactation in the interdependencies which are the object of our study, it would be incorrect to pool the samples from all lactations. Our first task is therefore to compare the different lactations. However, as the great majority of the milk samples were taken from the first and the second lactation, we confine ourselves to a comparison between these first two lactations.

Our analysis consists in selecting samples with equal percentages of fat and coming from one and the same animal, but from different lactations, and then comparing the means of the protein percentages

from the first with the corresponding means from the second lactation. The same analysis is also performed with the percentages of lactose. In order to test the significance of the difference between these two means, this difference is compared in the usual manner with the variation within the lactations for the fat percentage in question. Now, the fat percentages — as well as the percentages of protein and lactose — are determined to two decimal places. It would consequently very seldom be possible to find samples of exactly equal fat percentages to compare. Therefore the samples were classified in respect of their fat percentages in groups of a grouping unit, which was made as small as seemed possible to us. We have chosen 0.1 percent as such a grouping unit. The analysis of variance has thus been performed in a hierarchic way. The samples are first classified according to the different cows; within cows the samples are classified according to the different fat groups; within these fat groups the samples of the first and the second lactations are compared; and finally the mean squares within lactations are used as estimates of the error variance. The results are summarized in table 2. This table is based on all relevant samples. These are, however, fewer than those shown in table 1. The reason is that it has been necessary for each separate cow to exclude samples belonging to such fat groups as are not represented in both of the lactations. After this removal the available material consists of 855 samples distributed on 30 cows with 446 in the first and 409 in the second lactation.

In table 2 it may first be observed that the error mean square of

*Table 2.*

Analysis of variance of differences between first and second lactation with regard to the percentages of protein and lactose at fixed fat percentages.

	Degrees of freedom	Mean squares for	
		protein percentage	lactose percentage
Between cows .....	29	0.6984	1.0525
Within cows			
Between groups of different fat percentages.	179	0.2104	0.1718
At fixed percentages of fat			
First versus second lactation .....	209	0.0756	0.1246
Within lactations .....	437	0.0620	0.1272
Total	854		
Within lactations (from table 3)	1 401	0.0697	0.1359

lactose, 0.1272, is twice as large as the corresponding mean square of protein, 0.0620. We presume the reason — at least in part — to be that, as mentioned above, the amount of lactose is determined as the residue after subtraction of the amounts of fat, protein and ash from the total amount of dry matter. The errors of the determinations of all these constituents are therefore added together in the determination of the amount of lactose.

As regards the difference between the percentages of lactose between the first and second lactations its mean square, 0.1246, is somewhat less than the error mean square, 0.1272. There is thus no reason to assume any real difference of this kind. Concerning the difference between the percentages of protein of the two lactations, the ratio of its mean square, 0.0756, to the error mean square 0.0620 is 1.22. The corresponding theoretical variance ratio for  $P = 0.05$  may be calculated according to the approximate method given by FISHER and YATES (1938). For the two degrees of freedom 209 and 437 this variance ratio is found to be 1.21. Some hesitation seems therefore to be justified with regard to the question whether the percentage of protein for constant percentages of fat is changed from the first to the second lactation. But in the next paragraph, where we analyze the whole of our material, we find the error mean square of protein to be 0.0697 (table 3), and this is based on 1401 degrees of freedom (the error mean squares from table 3 are also entered at the bottom

*Table 3.*

Analysis of variance of the differences between percentages of protein and of the differences between percentages of lactose at fixed fat percentages.

	Degrees of freedom	Protein		Lactose	
		Sum of squares	Mean squares	Sum of squares	Mean squares
Between groups of different fat percentages .....	45	192.7371	4.2830	35.9205	0.7982
At fixed fat percentages					
Between twin pair means (= between unrelated animals)	503	115.0969	0.2288	203.3843	0.4043
Cow versus twin sister					
identical twins.....	168	11.9728	0.0713	25.5928	0.1523
uncertain twins .....	45	3.4419	0.0765	8.4680	0.1882
fraternal twins.....	82	8.5924	0.1048	15.7455	0.1920
Within cows (error) .....	1 401	97.6320	0.0697	190.4502	0.1359
Total	2 244	429.4731		479.5613	

of table 2). The ratio of the mean squares 0.0756 and 0.0697 is 1.08, whereas the theoretical variance ratio corresponding to  $P = 0.05$  and to the degrees of freedom 209 and 1401 is 1.18. It may therefore be legitimate to conclude that, if any differences in the percentages of protein between the first and the second lactation do exist at all, they are so small that they may be neglected. And consequently we also find it quite legitimate to pool the samples from the first and the second lactations — and *per analogiam* to pool the samples from all lactations — when studying the variations within and between the different twin pairs, in spite of the unequalness of the representations on the lactations.

#### 4. The genetical determination of the percentages of protein and lactose at fixed percentages of fat.

The process which has been followed in the elucidation of the genetical determination of the contents of protein and lactose at fixed percentages of fat, has in principle been the same as that employed in the foregoing paragraph. But as we now have to compare the relations between twins and between twin pairs, the order in which the hierarchic subdivisions of the material are to be performed, must be changed. The first subdivision now consists in a classification of the samples in respect of their fat percentages, and, as before, we use a grouping unit of 0.1 percent. All comparisons are thereafter made wholly *within* these fat groups, i.e. the comparisons are, also as before, made at fixed percentages of fat. Within these groups of fixed percentages the twin pairs' means of percentages of protein and of lactose are compared. This comparison is thus equivalent to a comparison between unrelated animals. Next, within the different twin pairs the means of the two twin sisters have been compared, and these comparisons have been made separately for identical, for uncertain, and for fraternal twins. Finally, the variation within cows is computed, and this variation is used in the case of all comparisons as the estimate of error variation. The computations are summarized in table 3, which gives the sum of squares as well as the mean squares, and in table 4, which shows the tests of significance. The theoretical variance ratios have, as before, been calculated by using the approximate method given by FISHER and YATES (1938). That the differences between the percentages of protein and lactose at different levels of fat percentages are highly significant ( $P$  very much less than 0.001)

Table 4.

Tests of significance of differences from table 3. All mean squares compared with error mean square.

Comparison between	Ratio of mean square to error-mean square		Theoretical variance ratios for corresponding degrees of freedom		
	protein	lactose	P = 0.05	P = 0.01	P = 0.001
Groups of different fat percentages .....	61.44	5.87			1.791
At fixed fat percentages					
identical twins .....	1.0230	1.1207	1.200		
uncertain twins .....	1.0976	1.3849	1.378	1.565	
fraternal twins .....	1.5036	1.4128		1.414	1.574
unrelated animals .....	3.2826	2.9750			1.249

is a quite trivial fact, and is due to the strong correlation between fat percentage on the one hand and protein- and lactose percentages on the other. But the great interest centres round the differences at fixed values of fat percentages (i.e. the differences within fat groups with the grouping unit of 0.1 percent).

Table 4 shows that at fixed fat percentages, the following propositions concerning the means of percentages of protein and lactose hold in the average:

1. between identical twin sisters the differences are very small for protein as well as for lactose. In fact P is decidedly larger than 0.05. Quite especially is this the case for protein.

2. between twin sisters which we have labelled as uncertain with regard to their twinships, the difference is still very small for protein, P decidedly larger than 0.05, but larger for lactose, P approximately equal to 0.05.

3. between fraternal twin sisters there are great differences for protein, P less than 0.01, as well as for lactose, P approximately equal to 0.01.

4. between unrelated animals the differences are very great for protein as well as for lactose, with P in both cases much less than 0.001.

As stated above each separate comparison made in table 4, is based on the ratio of, on the one hand the mean square corresponding to the comparison in question, on the other hand, the common error mean square (i.e. 0.0697 for protein and 0.1359 for lactose) with its 1401 degrees of freedom. For the sake of completeness we have used table 3 to make still two kinds of comparisons.

Table 5.

Test of significance of comparisons at fixed fat percentages: differences between means of cows belonging to the same fraternal twin pair (82 degrees of freedom) versus differences between means of cows belonging to the same identical twin pair (168 degrees of freedom).

Ratio of mean squares		Theoretical variance ratio for	
protein	lactose	P = 0.05	P = 0.01
1.4698	1.2607	1.326	1.537

As it may be asked if the differences between the means of two fraternal twins on an average are significantly larger than the corresponding differences for identical twins, when these two differences are compared *directly*, we have, by computation of the ratios between the mean squares from table 3 made a test of significance (table 5). It is seen that P for protein is less than 0.05 but for lactose larger than 0.05. This does, however, of course not invalidate our conclusion with regard to the significance of the differences between fraternal twins in the case of lactose. When comparing the two kinds of twins directly instead of via the error variance, the consequent change in degrees of freedom would necessitate a larger difference between the two intra-twin differences in order to make them *statistically* significant. The indirect test (table 4) shows this significance to be valid.

We have also compared the mean squares due to the variation between the different twin pair means (0.2288 for protein and 0.4043 for lactose) with the mean squares which we get when pooling all comparisons between twin sisters. From table 3 these are found to be 0.0814 for protein and 0.1688 for lactose, corresponding to 295 degrees of freedom. The test of significance is shown in table 6. It tells us that this difference, too, is highly significant, P being decidedly less than 0.001.

Table 6.

Tests of significance of comparisons at fixed fat percentages: Variation of twinpair means (503 degrees of freedom) versus pooled variation between means of cows belonging to the same twinpair (295 degrees of freedom).

Ratio of mean squares		Theoretical variance ratio for P = 0.001
protein	lactose	
2.8108	2.3951	1.386

The analysis leads to the conclusion: *the values which the percentages of protein and of lactose do attain at fixed fat percentages are mainly genetically determined.* Consequently the same thing holds also with regard to number of calories in one unit of milk at fixed percentages of fat.

Table 7.

Tests of significance of differences between twins of every twinpair classified according to kinds of twinships and feeding experiments.

Kind of twinship	Twins nr	Experiment	Degrees of freedom	Ratio of mean square to error mean square		Theoretical variance ratios for corresponding degrees of freedom		
				protein	lactose	P = 0.05	P = 0.01	P = 0.001
Identical. . . .	4—5	A	13	0.7547	1.5063	1.719		
” . . . .	8—9	A	10	0.4089	0.4540	1.825		
” . . . .	106—107	A	5	0.3357	0.4194	2.195		
” . . . .	115—116	A	4	0.1836	0.1648	2.350		
” . . . .	818—819	A	11	0.8580	1.0486	1.785		
	Total	A	43	0.5997	0.8993	1.387		
” . . . .	119—120	B	13	0.8479	1.3171	1.719	2.856	
” . . . .	123—124	B	5	2.8192	1.6409	2.195		
” . . . .	201—202	B	7	1.6973	1.1435	1.998		
” . . . .	203—204	B	5	0.9799	2.1104	2.195		
” . . . .	205—206	B	10	0.3974	0.7631	1.825		
” . . . .	207—208	B	7	0.5997	0.6063	1.998		
” . . . .	209—210	B	5	1.3228	0.4650	2.195		
” . . . .	213—214	B	9	0.8981	1.4209	1.872		
” . . . .	215—216	B	5	0.6241	2.9787	2.195	2.856	3.658
	Total	B	66	1.0287	1.2995	1.312		
” . . . .	725—726	C	18	1.3113	1.0074	1.606		
” . . . .	921—922	C	9	0.8723	1.7211	1.872		
	Total	C	27	1.1650	1.2450	1.491		
” . . . .	117—118	D	8	1.8336	1.5570	1.924		
” . . . .	121—122	D	6	1.0445	0.6821	2.084		
	Total	D	14	1.4964	1.1818	1.691		
” . . . .	823—824	E	18	1.4290	0.7763	1.606		
Uncertain . . .	15—16	C	15	0.9498	2.2171	1.667	2.025	2.460
” . . .	716—717	C	16	1.4821	0.6107	1.645		
	Total	C	31	1.2253	1.3878	1.457		
” . . .	821—822	E	14	0.8149	1.3767	1.691		

Kind of twinning	Twins nr	Experiment	Degrees of freedom	Ratio of mean square to error mean square		Theoretical variance ratios for corresponding degrees of freedom		
				protein	lactose	P = 0.05	P = 0.01	P = 0.001
Fraternal ...	906—907	A	4	0.6514	1.6321	2.350		
» ...	915—916	A	13	2.5064	1.3767	1.719	2.093	2.582
	Total	A	17	2.0703	1.4371	1.624	1.957	2.360
» ...	736—737	C	14	0.9010	0.8079	1.691		
» ...	757—758	C	13	2.0516	1.4702	1.719	2.093	
» ...	830—831	C	13	1.2525	1.4834	1.719		
	Total	C	40	1.3888	1.2428	1.401		
» ...	647—648	E	13	1.0846	2.3584	1.719	2.093	2.582
» ...	807—808	E	12	1.5337	0.9227	1.750		
	Total	E	25	1.3013	1.6689	1.511	1.775	

A glance at table 4 shows that, though the ratio of the identical twin mean square to the error mean square is very small, yet it is larger than 1. This suggests that there may also be an environmental factor in the determination of the percentages of protein and lactose at fixed fat percentages. In order to try to throw some light on this question, the mean squares of each individual intra twin pair comparison has been divided by the error mean squares (0.0697 for protein and 0.1359 for lactose, table 3). The figures are assembled in table 7. The first three columns correspond to the first three columns in table 1. The degrees of freedom indicated are those corresponding to the available comparisons between the two twins at fixed fat percentages. The degrees of freedom corresponding to error is, as before, in all cases 1401 (table 3), and is not explicitly shown in the table. The theoretical variance ratios, which are computed according to the above-mentioned approximate method by FISHER and YATES (1938), are in all cases inserted for  $P = 0.05$ ; for  $P = 0.01$  and  $0.001$  they are given when necessary. The approximate method is of course less satisfactory for the many small degrees of freedom included in table 7, but the values found are certainly true enough to show the general trend.

Now, of the 38 mean square ratios in table 7 corresponding to the 19 identical twin pairs, there are 19 which are less than 1, which is just what should be expected in the case of random variation. But in 2 cases the ratios correspond to  $P$  less than 0.05 and of these 1 case corresponds to  $P$  less than 0.01. Two such cases out of 38 are perhaps



somewhat too many to be due only to random variations. It may be observed that both these cases refer to twins belonging to feeding group B. This group did consist of twin pairs in which, prior to calving one of the twin sisters was greatly overfed, and one fed on a low level (cf. BONNIER and HANSSON 1946). As a result of the feeding system rather large fat deposits are found in the overfed animals, and when the lactation begins these overfed cows have a much higher percentage of fat in their milk than have their twin sisters. But this difference diminishes during the course of the lactation, and is eventually quite levelled out. (A preliminary report on the lactations of the animals belonging to group B is given in BONNIER 1946. A more detailed account will be published later.) Perhaps follows from these circumstances that the normal fat metabolism in the overfed animals is disturbed to such an extent, that the genetically determined mechanism by which the percentages of protein and lactose are related to the fat percent, is unable to function normally. However, as far as we can judge now, there is no correlation between the rate of the above-mentioned levelling out, and the order of magnitude of the mean square ratios in table 7. The actual facts on which the assumption of this kind of environmental influence on the interdependencies in question are based are thus still very scanty and unreliable. And this is thus in sharp contradistinction to the very reliable genetical influences.

As to the three uncertain pairs it may be mentioned that pair nr 15-16 is that, which, on morphological grounds, is most likely to be looked upon as a fraternal pair. With regard to lactose this pair has indeed a  $P$  which is less than 0.01. All other values of  $P$  in this group are larger than 0.05.

Within the group of fraternal twins only 4 out of 14 mean square ratios are less than 1. There are 3 ratios which correspond to  $P$  less than 0.05, and of these 2 correspond to  $P$  less than 0.01. This can evidently not be due to chance alone, and, as was seen in table 4, the pooling of all 7 fraternal pairs gives the small values of  $P$  mentioned above.

It should be pointed out that the statistical method by which we have analyzed our data, gives us the same kind of informations as a study of the regressions of protein and lactose on fat would have given us. In fact, tables 3 and 4 tell us that there are unimportant differences between the regressions corresponding to two identical twins, that these differences in the case of two fraternal twins are statistically significant, and that, when the regressions of two unrelated animals are compared, the differences are of a statistically high order of mag-

nitude. But the method which we have adopted in the present article is at the same time more sensitive and more reliable, than an ordinary comparison of the regression coefficients would have been. The reasons are: 1. The regressions are not linear and not even quadratic (BONNIER, HANSSON and JARL 1946), at least not when samples from different animals are pooled, and 2. when comparing two regression functions such a comparison becomes more and more unreliable the farther away the dependent variates are from their means (cf. FISHER 1936 p. 141). But as two cows, which are not identical twins, often have widely differing fat percentage averages, we do not see how this difficulty could be overcome in an ordinary study of the regressions alone. By these remarks, however, we do not mean to say that a study of the usual regression coefficients is without its interest.

We wish also to emphasize that to use the fat percentage as the dependent variate and the percentages of protein and lactose as independent variates is not essential. It is only a matter of convention. In practice it is always easier to determine the percentage of fat than the percentages of protein or lactose. It has therefore seemed most natural to us to classify our material according to the percentages of fat and then to study the variations of the percentages of protein and lactose within these groups of fat percentages i.e. to study the variations of protein and lactose at fixed values of fat percentages. But we could of course as well have studied in the same manner the variations of percentages of fat and lactose at fixed values of percentages of protein, or percentages of fat and protein at fixed values of percentages of lactose.

## 5. Summary.

1. A material consisting of 2245 chemically analyzed milk samples from 29 twin pairs (table 1) is the basis of a statistical investigation into the genetical determination of the interdependencies between the percentages of fat, protein, and lactose.

2. As a preliminary, the difference between the first and second lactations' percentages of protein and of lactose in individual cow and at fixed percentages of fat, were studied. It has been concluded (table 2) that as regards lactose these differences are wholly due to random variation, and that as regards protein these differences are, if not wholly, so at least to a very great extent also due to random variations. By analogy the same conclusion has been drawn concerning

differences between all lactations, and consequently, in the following analyses, the figures from the different lactations of the individual cows have been pooled.

3. It is shown (tables 3–6) that, from a statistical point of view, the percentages of protein at fixed values of fat percentage, are equal for two identical twins, not equal for two fraternal twins, and very unequal for two unrelated animals. The same conclusions hold good as regards percentages of lactose. It is concluded that the interdependencies between the percentages of fat, protein, and lactose are, very largely, genetically determined. As a consequence it is also concluded that a cow's genetical constitution determines the number of calories in one unit of milk with a given fat percentage.

4. Following an investigation into the differences between the two twins of each individual twin pair (table 7), it is proposed as a possibility that very high feeding prior to calving, may so disturb the normal fat metabolism that the genetically determined mechanism which regulates the proportions of percentages of protein and lactose to the fat percentage, may be unable to function normally. It is, however, emphasized that the actual facts on which such an assumption of environmental influence on the interdependencies in question are based are still very scanty.

### Literature cited.

- BONNIER, G. 1946 a. Studies on monozygous cattle twins. I. General introduction. *Acta Agr. Suecana* 1, 139–146.
- 1946 b. Samspelet mellan arv och miljö i nötkreatursproduktionen belyst genom tvillingstudier. (Engl. summary: On the interactions of heredity and environment in growth and milk-yield, as elucidated by experiments with monozygous cattle twins.) *Lantbruksakad. T.*, 85, 221–240.
- & HANSSON, A. 1946. Studies on monozygous cattle twins. V. The effect of different plans of nutrition on growth and body development of dairy heifers. *Acta Agr. Suecana* 1, 171–205.
- — & JARL, F. 1946. Studies in the variation of the calory content of milk. *Acta Agr. Suecana* 2. (In press.)
- FISHER, A. R. 1936. *Statistical methods for research workers*. 6th ed. Edinburgh.
- & YATES, F. 1938. *Statistical Tables*. Edinburgh.
- JARL, F. 1946. Studies on monozygous cattle twins. VI. Investigations into the quantitative variation of ascorbic acid in the milk. *Acta Agr. Suecana* 1, 207–238.

# The Cookability of Yellow Peas.

## A colloid-chemical and biochemical study.

By SANTE MATTSON

From the Institute of Pedology, College of Agriculture, Upsala.

### I. Introduction.

The cooking qualities of peas has been the subject of several investigations. As early as 1872 RITTHAUSEN and KREUSLER studied the cooking qualities of peas in relation to their composition and came to the conclusion that the cookability is related to the solubility of legumin which "durch die Gegenwart grösserer Mengen von Salzen der alkalischen Erden, Kalk und Magnesia, vermindert wird, wenn gleichzeitig der Gehalt an phosphorsaurem Kali vermindert ist".

Although van HOWELINGEN (1903) was led to the conclusion that a high phosphate content is combined with poor cooking qualities most authors cling to the opposite view. FRUWIRTH (1918), BECKER-DILLINGEN (1929), PRIANISCHNIKOW (1930). The latter writes: "Eine Erbse mit einem geringeren Gehalt an phosphorsauren Alkalien in der Asche lässt sich schwerer kochen und umgekehrt. Es ist auch bekannt, dass sich die Erbse in hartem Wasser (kalkreich) schwerer kochen lässt als in weichem Wasser."

BJÄLFVE (1944) finds a positive correlation between phosphate content and cookability. In dry years when the up-take of P by the peas is lower the cooking quality is poorer. If hard-cooking peas are soaked in a solution of a dibasic alkali phosphate their cooking quality will be improved.

By the work of TORSSELL and JOSEFSSON 1938 and later by TORSSELL alone (1941, 1942 and 1943) an extensive investigation has been done on the cooking qualities of different varieties of peas. This work points

to hereditary tendencies, but the influence of environment on composition and cookability is equally certain.

GELIN and SCHWANBOM (1943 and 1944) have emphasized the importance of the colloidal condition of the peas, and SOSNIN (1927) points to the function of the pectin in the middle lamellae which bind the cells together. SOSNIN makes the noteworthy observation that the (colloidal) contents within the cells, such as protein and starch, can have nothing to do with the cooking process because the cell wall is not ruptured, the cells merely fall apart, single or in groups, when the peas are cooked.

The initiative to the present investigation is due to professor TORSSELL, who suggested to the author the need of a colloid chemical study of the problem.

## 2. Composition of hard- and soft-cooking peas.

This work was started in 1944 with two samples of "Torsdag II" peas, S (soft-cooking) and H (hard-cooking), from the harvest of 1943, which were received from professor R. TORSSELL, at that time head of the Svalöf Plant Breeding Station in Upsala. A determination of the cookability of the peas by the method of TORSSELL (1942)<sup>1</sup> gave the following results:

### 1. Soaked and boiled in dist. water:

S.	90 minutes	=	99 %	cooked
H.	90	»	=	23 % »

### 2. Soaked in 2 % NaCl solution, boiled in dist. water:

S.	30 minutes	=	99 %	cooked
H.	120	»	=	98 % »

The results show that the S-peas are about four times as cookable as the H-peas. The weight per 1 000 peas was: S = 190.3 grams, H = 208.4 grams.

The two samples of peas were studied in different ways. A portion of each sample was ground in a special mill at the Upsala Valskvarn Inc., and separated by sifting into flour, middling and bran. Table 1 gives some of the data obtained from the three fractions.

---

<sup>1</sup> 50 grams of peas are soaked over night (18 hours) in 200 cc water in 500 cc Erlenmeyer flasks. The flasks, which are provided with stopper and reflux tubes, are placed in a pot of boiling water. The pot, which holds seven flasks, is provided with a lid having seven perforations through which the reflux tubes are fitted.

Table 1.

Some analytical data on the composition of flour, middling and bran from two samples of peas:

S = soft-cooking, H = hard-cooking.

	Flour		Middling		Bran	
	S	H	S	H	S	H
Yield of separates, %.....	80.0	87.5	8.1	3.8	11.9	8.7
Moisture, % .....	14.20	13.87	13.08	12.35	13.65	12.98
Ash, % of dry wt. ....	2.98	2.75	3.75	3.21	3.34	2.78
"Excess base" in ash, m.e./100 g.....	3.84	11.26	7.45	22.95	32.85	51.19
Water-soluble org. matter, % of dry wt...	25.0	26.6	26.9	24.6	11.1	6.2
Water-sol. ash, % of dry wt.....	2.1	2.5	2.9	2.2	1.6	.8
Ether-sol. org. matter, % of dry wt....	1.83	1.87	2.36	2.85	.92	.48
Alcohol-sol. org. matter, % of dry wt. ..	1.05	1.44	1.75	1.89	.59	.42
pH <sub>0</sub> (original sample).....	5.91	6.00	5.82	5.79	5.74	5.55
Acidity m.e./100 g. (pH <sub>0</sub> → pH 7) .....	9.5	8.5	14.0	14.0	12.0	12.5
pH <sub>II</sub> (electrodialyzed sample) .....	4.40	4.75	3.92	3.37	2.72	2.55
Acidoids m.e./100 g. (pH <sub>II</sub> → pH 7).....	26.0	19.5	44.0	55.8	62.0	72.0
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> soluble in 2 % HCl:						
Total..... mg/100 g	837	523	911	430	293	166
Inorganic .....	88	100	100	50	63	25
Organic.....	749	423	811	380	230	141
Phytin .....	557	220	765	202	140	137

We note that the ash content is higher in the S- than in the H-fractions. The percentage is highest in the middlings.

The "excess base" (obtained by backward titration of the ashes to phenolphthalein) is much higher in the H- than in the S-fractions. On the basis of 100 grams of the different fractions the number of milliequivalents excess base increase greatly from flour to bran. The excess base, as here determined, is greatly affected by the phosphate content. The latter is, as will be seen in the table, much higher in the S- than in the H-peas. The excess base is, therefore, smaller in the S- than in the H-peas, though the total base content is, as we shall see, greatest in the S-peas.

The ether and alcohol soluble fractions do not differ significantly in the two samples of peas. These extracts consist mostly of lecithin which, according to HALÁSZ (1918) makes up about one sixth to one seventh of the total phosphoric acid content of the peas.

In view of the dominating role which the different cations (apparently the exchangeable, acidoid-bound cations) play in the cooking of peas it was deemed desirable to determine the acidoid content of the

different fractions of the two samples. These were therefore electro-dialyzed and titrated with KOH in 1 n. KCl solution, as were also the original samples. We note that the  $\text{pH}_u$  is lower, and the acidoid content is higher in the S-flour than in the H-flour. In the middling and bran it is the other way, the  $\text{pH}_u$  is higher, and the acidoid content is lower in the S- than in the H-fractions. However, since the flour constitutes by far the greatest fraction, the total acidoid content is greater in the S-peas than in the H-peas. This difference might not be significant, but the thing which is of significance is the kind of bases (cations) which exist in combination with, and "saturate" these acidoids. We shall show later that the major part of the problem of the cookability of peas hinges on this condition. It is interesting to note that the acidoids become stronger ( $\text{pH}_u$  lower) and the acidoid content gets larger as we go from flour to bran.

There are two groups of substances which may be assumed to play the major role of acidoids in peas, namely, the polyuronides, chiefly pectin, and the proteins, chiefly legumin. Attempts have been made, as already mentioned, to relate these substances to the cooking qualities of peas. The two (whole) samples of peas were therefore analyzed with respect to these constituents.

The pectin was determined by the method of DICKSON, OTTERSON and LINK (1930). This is based on a decarboxylation of the uronic acids by boiling with 12 % HCl in a special apparatus and measuring the amount of  $\text{CO}_2$  given off. The results for the whole S- and H-samples of peas showed 3.96 % uronic acid in S and 3.80 % in H. This corresponds to 5.60 and 5.38 per cent of pectin respectively. The analyses were carried out in triplicate with good agreement. We note that the difference in pectin content is insignificant. It is the pectin of the middle lamella which binds the cells together, and we shall see later that the cookability depends on the solvation of this pectin, and this in turn depends on the nature of the cations in combination with the pectin.

The percent of total (Kjeldahl) nitrogen was found to be 4.47 % in the S-peas and 4.06 in the H-peas. This corresponds to a protein content of 27.94 % in the soft-cooking peas and 25.38 % in the hard-cooking peas.

The cookability of peas may vary considerably within one and the same sample. Before making a mineral analysis of our two samples of peas we therefore decided to cook the peas individually and separate them into subsamples of hard- and soft-cooking peas. Each pea was put in a small test tube together with 1 cc of water. After soaking

for 18 hours the tubes were placed in beakers and heated on the water bath in a large pot at 96° C for 90 minutes. The peas were then examined with a glass rod and separated into hard-, medium- and soft-cooking peas. The contents of the tubes were evaporated to dryness and the material ground to a fine powder.

Only the material from the hard- and soft-cooking subsamples was included in the analysis reported in table 2. The table thus gives the composition of

1. hard, hard-cooking peas (hH);
2. soft, hard-cooking peas (sH);
3. hard, soft-cooking peas (hS);
4. soft, soft-cooking peas (sS).

The cations and the phosphoric acid were determined in an extract obtained by digesting 10 grams of the samples with 200 cc 2 % HCl solution in the shaking machine for 18 hours.

The inorganic and total phosphoric acid was determined by the photo-electric method of SCHEEL (1936) and the phytin phosphoric acid by the method of HARRIS and MOSHER (1934). The organic  $P_2O_5$  is obtained by subtracting the inorganic from the total  $P_2O_5$ . The inorganic  $P_2O_5$  could not be accurately determined because the original extract was somewhat colored by the organic matter.

Table 2.

The composition of hard- (h) and soft- (s) cooking subsamples of hard- (H) and soft- (S) cooking samples of peas.

Ca, Mg, K and  $P_2O_5$  by 2 % HCl extraction.

Sample	Ash %	M.e./100 g				$P_2O_5$ mg/100 g				N total %
		"Excess base"	Ca	Mg	K	Total	In-organic	Organic	Phytin	
sS	3.29	7.89	4.10	12.04	30.35	954	150	804	597	4.35
hS	2.93	9.20	5.17	11.23	28.30	825	150	675	472	4.19
sH	2.58	15.84	4.46	10.96	27.75	603	100	503	320	4.03
hH	2.21	18.62	5.71	10.69	25.65	380	100	280	153	3.86

We note that there is the same trend in the difference in composition between the hard (h) and soft (s) subsamples as there is between the hard (H) and soft (S) original samples. This makes the analysis doubly significant.

It would seem that the cookability of peas depends on 1. a high ash content, 2. low "excess base" (due to a high  $P_2O_5$  content), 3. low Ca,



4. high Mg (probably only when Mg takes the place of the more "anti-colloidal" Ca), 5. high K, 6. high  $P_2O_5$ , especially in organic combination, and 7. a high nitrogen content.

We shall see later that the most important factor is a high content of phytin which is a Ca- and Mg-precipitant.

### 3. Influence of electrolytes.

TORSSELL found that the cooking qualities of peas may be greatly improved if the peas are soaked over night in a 2 per cent NaCl solution after which the solution is poured off and distilled water is added. This effect has been found to be the result of a displacement of Ca by Na ions from the base exchanging acidoids.

Colloidal properties are generally suppressed by high concentrations of electrolytes. That the cookability of peas is no exception to this rule is shown in fig. 1. After soaking 50 grams of peas for 18 hours in 200 cc solutions containing increasing concentrations of NaCl and  $CaCl_2$ , the S-peas were boiled for 60 minutes and the H-peas were boiled (in NaCl only) for 90 minutes, without changing the solution.

We note that  $CaCl_2$  greatly suppresses the cookability of the peas within a range of concentration as low as from 0.001 to 0.01 n. Even NaCl suppresses the cookability but not until the concentration exceeds 0.5 n. At lower concentrations the NaCl improves the cookability, especially in the case of the hard-cooking peas. This would indicate that it is the acidoid-bound cations and not the displaced, free ions which control the cookability, as long as the concentration of the latter ions does not exceed the coagulation-threshold. The case is exactly analogous to the behavior of soil colloids.

### 4. Influence of pH.

If the amphoteric proteins have anything to do with the cookability of peas we might expect this, like so many other properties, to exhibit a minimum at the isoelectric point of the protein.

Fig. 2 shows the cookability as a function of the pH. 50 grams of peas were soaked for 18 hours in 200 cc of water to which HCl or NaOH were added to adjust the pH. The soft-cooking S-peas were boiled for 1 hour and the hard-cooking H-peas for 1  $\frac{1}{2}$  hours. The pH was determined by the glass electrode in the juice of the cooked peas.

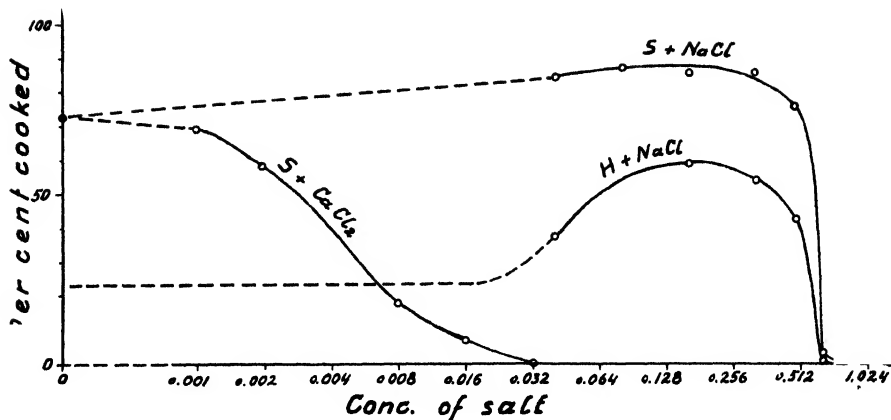


Fig. 1. The influence of NaCl and  $\text{CaCl}_2$  on the cookability of peas.

The experiment yields two characteristic U-shaped curves whose minima lie between pH 4 and 5. The curve of the hard-cooking H-peas occupies, however, a decidedly higher position on the pH scale than that of the soft-cooking S-peas. The former are therefore, at their original pH (6.20), much nearer the point of minimum cookability than the latter, at their original pH (6.10).

Since the curves are very steep in the region of the original pH of the peas a small change in reaction will greatly affect the cookability. Hard-cooking peas can be made soft-cooking by raising the pH while the soft-cooking become hard-cooking if the pH is lowered. The difference between the S-peas and the H-peas, from the point of view of cookability, is only a matter of a few tenths of a pH unit.

The curves in fig. 2 suggest that we are dealing with a property which is governed by the amphoteric nature of the system, the minimum in cookability corresponding to the isoelectric point of the protein, and the position of the ascending segments of the curves being determined, on the acid side, by the nature and concentration of the polyvalent anions and, on the alkaline side, by the nature and concentration of the polyvalent cations present in the system.

## 5. The isoelectric point.

This conclusion seemed to be confirmed by the results of an electrophoretic study of a sol obtained by extracting pea flour with 0.02 n. NaOH, precipitating the dissolved legumin at pH 4.5, washing the precipitate and finally reprecipitating it with NaOH. The electrophoretic

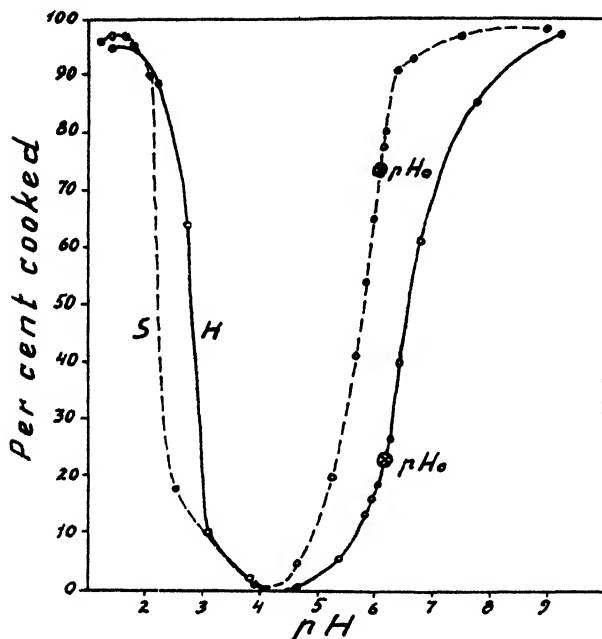


Fig. 2. The cookability of hard- (H) and soft- (S) cooking peas as a function of pH. The peas were soaked for 18 hours in water to which HCl or NaOH had been added. The S-peas were boiled for 60 minutes and the H-peas for 90 minutes.

measurements were made by the microscopic apparatus constructed and described by MATTSON (1933).

The measurements were made in pure water, in 0.001 n.  $\text{CaCl}_2$  and in 0.001 n. Na-oxalate, the pH being adjusted with HCl.

The results of this study are shown in table 3.

We note that the impure legumin which, among other things contains lecithin, is isoelectric at pH values which correspond to the minima in cookability of the peas. The isoelectric point is a little higher in  $\text{CaCl}_2$  and a little lower in Na-oxalate than in pure water. The coagulation extends to higher pH in  $\text{CaCl}_2$  and to lower pH in Na-oxalate as compared to the pure water systems. All this is in agreement with the general behaviour of amphoteric colloids.

The conclusion made by RITTHAUSEN that the cookability of peas is related to the solubility of the legumin, to its tendency to peptize or to coagulate, seemed very reasonable. But when we now studied the effect of Na-oxalate on the cooking qualities of peas we found that in the presence of this salt (0.1 n.) all peas remained easily cookable at all pH values, including that of the isoelectric point of the legumin:

Table 3.

Electrophoresis and coagulation of legumin at various pH. 25 mg. Na-leguminate + HCl in 25 cc. The migration velocity is expressed in  $\mu$  (micron = 0.001 mm) per second in a potential gradient of 1 volt per cm.

In water			In 0.001 n. $\text{CaCl}_2$			In 0.001 n. Na-oxalate		
pH	Coagulation after 18 hours	Electrophoresis $\mu/\text{sec.}$ 1 volt/cm	pH	Coagulation after 18 hours	Electrophoresis $\mu/\text{sec.}$ 1 volt/cm	pH	Coagulation after 18 hours	Electrophoresis $\mu/\text{sec.}$ 1 volt/cm
5.70	$\times^1$	-1.9	6.42	$\times \nearrow \times \times^1$	-1.3	5.50	$\times \times$	-2.2
5.44	$\times \times \times$	-0.9	5.68	$\times \times \times \times$	-0.7	4.62	$\times \times \times \times$	-0.4
5.01	$\times \times \times \times$	-0.4	5.38	$\nearrow \times \times \times$	-0.4	4.20	$\nearrow \times \times \times$	$\pm 0.0$
4.79	$\times \times \times \times$	-0.3	4.13	$\times \times \times \times$	+0.3	3.55	$\nearrow \times \times \times$	+0.6
4.17	$\nearrow \times \times \times$	+0.2	3.47	$\times \times$	+1.3	3.30	$\times \times \times \times$	+1.0
3.65	$\times \times \times \times$	+0.9	3.08	$\times$	+1.7	2.95	$\times \times \times \times$	+1.4
3.48	$\times \times$	+1.9				2.65	$\times \times \times \times$	-
3.28	$\times$	+2.3				1.85	$\times \times \times \times$	-

Na-oxalate, which does not prevent the coagulation of legumin at its isoelectric point, does prevent the peas from becoming hard-cooking at this point.

There is, therefore, apparently no connection between the coagulation of the proteins and the cookability of the peas. This conviction was strengthened by the additional observation that H-saturated peas (acetic acid extracted) and Na-saturated peas (NaCl-treated) showed no minima in cookability at the isoelectric point of the legumin. Only with untreated peas or peas saturated with Ca or Mg ions did we obtain the characteristic U-curves shown in fig. 2.

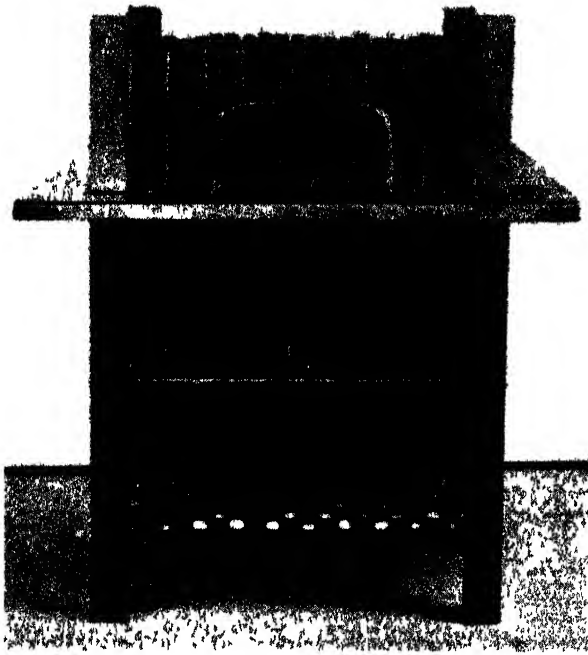
## 6. A special cooker.

Before these experiments are discussed we shall give a description of an apparatus for the cooking of peas which had been constructed for the purpose of obtaining a continuous curve representing the cooking of the individual peas.

The apparatus is shown by the photograph in fig. 3.

The cooker consists of a  $22 \times 22$  cm brass plate, 7 mm in thickness, through which 100 conical holes have been bored. The holes are 10 mm at the top and 5 mm at the bottom. Attached to a frame are two brass plates, 1 mm in thickness, one 8 cm and the other, which serves

<sup>1</sup>  $\times$  = beginning coagulation,  $\times \times \times \times$  = complete coagulation.



*Fig. 3.* A cooker which yields a continuous cookability-curve.

as lid, 18 cm above the thick bottom plate. These two plates are provided with 100 holes which are accurately centered over the conical holes in the bottom plate. One hundred brass tubes, 24 cm long and 8 mm in diameter, are sealed up in one end with a brass plug from which a 2 mm thick and 30 mm long brass rod, "the plunger", projects. The tubes fit closely but glide easily through the holes in the two upper plates, but are stopped by the conical holes in the bottom plate, through which only the projecting plunger can pass. The tubes are weighted with lead shots to a weight of 82 grams. Every part of the cooker is tinned.

The peas, which have been allowed to swell over night, are placed in the crater-like holes in the bottom plate, and the tubes are put in place with the plunger resting on the top of the pea (see fig. 3). The pot (not shown in the picture) has in the meantime been placed on the hot plate and when the water boils vigorously the apparatus is placed in the pot and the cooking is started.

The cooking is done in steam to prevent too rapid leaching of the peas. The water level in the pot is therefore kept about an inch below the peas.

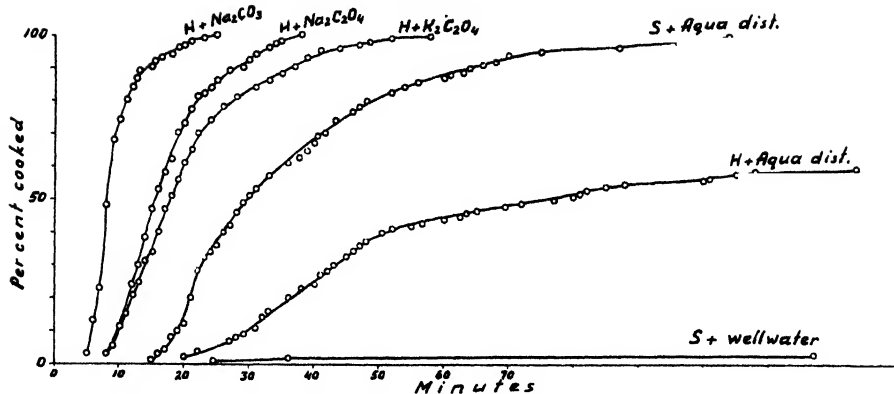


Fig. 4. Cookability of the hard- and the soft-cooking peas (fig. 2) in well-water and in steam after swelling in distilled water and in 0.1 n. solutions of Na- and K-oxalate and  $\text{Na}_2\text{CO}_3$ .

When a pea is cooked it is penetrated by the plunger and the tube drops about 3 to 4 cm. This is recorded and when all the peas are cooked a curve is constructed which shows the per cent of peas cooked as a function of the time.

The peas are first allowed to swell in a single layer in an Erlenmeyer for 18 hours in a minimum amount of distilled water. 30 cc per 100 peas leaves sufficient free liquid for a pH determination with the glass electrode. Dry peas take longer to cook and yield irregular curves. Some peas may fail to swell in 18 hours. Such peas are among the last to cook.

Fig. 4 shows the continuous cooking curves of the hard- (H) and soft- (S) cooking peas (fig. 2). The figure also shows the effect on the cookability by allowing the H-peas to swell in 0.1 n. sodium carbonate and sodium and potassium oxalate. Included in the figure is also a curve showing the cooking of the S-peas when, instead of steam, the peas were soaked and boiled in Ultuna well-water, a rather hard water.

We note that the carbonate and oxalate ions, which both are Ca-precipitants, make the peas very cookable. The carbonate not only precipitates the divalent cations, Ca and Mg, it also increases the pH which, according to fig. 2, alone is sufficient to improve the cookability (by causing the precipitation of Ca and Mg by precipitants present in the peas, cf. below). But the alkali salts have still another effect: the alkali cations directly displace some of the divalent cations in combination with the pea acidoids. This effect is produced by such alkali salts as NaCl (cf. fig. 1). We note that the Na ions have a greater effect than the K ions, a general rule in colloidal behavior.

It should be pointed out that the extremely unfavorable effect of the tap water would not be experienced by the housewife, who uses a much smaller proportion of water than in our experiment with 100 peas in several liters of water.

## 7. A biochemical factor.

At this juncture some very important observations were made:

1. If peas are *soaked* in water (in the presence of toluol) for as long as 8 days they become entirely uncookable (fig. 5).
2. If the peas are boiled for 10 minutes, after swelling in water for 4 hours, the soaking will have no effect but leave the peas as cookable as in their original condition. (Heating dry peas at 100° for one hour has no effect on the action produced by the soaking).
3. If peas are *leached* for 8 days (by suspending them in cheese cloth in a large cylinder of distilled water) they become entirely uncookable, in this case even if the peas are boiled for 10 minutes after 4 hours of soaking.

The cooking of peas thus appears to involve a biochemical as well as a colloid chemical mechanism. The part played by each of these will be brought out by the experiments described in the remaining part of this paper.

Having found that soft-cooking peas are rich in phytin it seemed reasonable to assume that the effect of the soaking might be due to a decomposition of this compound by phytase. Since the enzyme is killed by heat a preliminary boiling of the peas must prevent the fermentation and leave the cookability unaffected. But the fact that the preliminary boiling is without effect if the peas are leached would still be unexplained. What are the water soluble substances which, upon leaching, leave the peas uncookable? An answer to these questions will be found in the following experiment.

For this experiment we used a sample of soft-cooking "Torsdag II" peas (Ultuna farm 1945) and a sample of "Avesta" (1943) peas, the latter kindly supplied by Mr. K. G. BJÄLFVE, and claimed by him to be the hardest cooking peas in his collection.

Four 50-gram portions of peas of each sample were placed in 250 cc water in flasks of 1 liter capacity. After 4 hours (when the peas had swelled) two of the flasks, I A and I B, in each of the series were brought to boil for 10 minutes under a reflux condenser. After the addition of toluol the flasks were then placed in a closet where the temperature was kept around 37° C. After 8 days the two other flasks, II A and II B, in

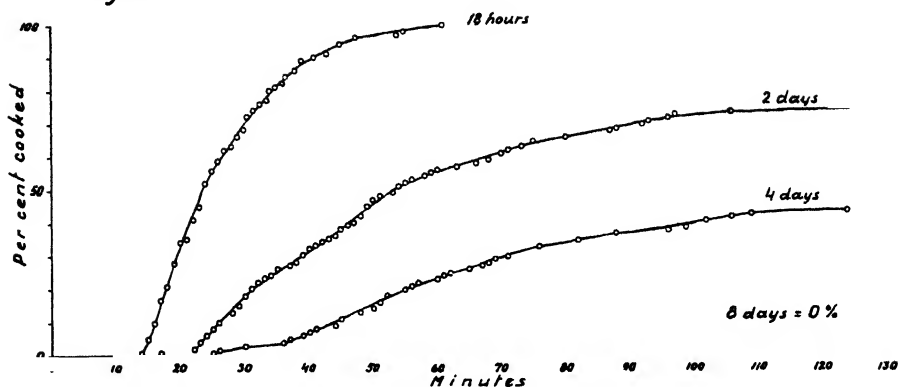
*Gyllen 1944*

Fig. 5. The effect of prolonged soaking on the cookability of peas. After soaking 8 days the peas are uncookable.

each of the series were brought to boil for 10 minutes. Flasks I A and II A received now 250 cc water while flasks I B and II B received 250 cc of 4 % HCl. All the flasks were then placed in a shallow water bath to insure an active convection, and kept there for 8 days at a temperature not exceeding 37° C. The analysis of the filtrates are shown in table 4.

The acid extracts I B and II B might be looked upon as representing the total amounts present in the unfermented and in the fermented peas respectively.

The following facts should be noted:

1. The hard cooking "Avesta" contain only about one half as much phytin as the soft cooking "Torsdag II" peas (I B). The difference between the two samples of peas is in general the same as the difference between the hard- and the soft-cooking peas in table 2.
2. The phytin and the other organic phosphates are greatly reduced by digesting the peas in the phytase-active condition. The phytase seems to be more active in the "Torsdag II" than in the "Avesta" peas. (Comp. II B with I B.)
3. After boiling the peas for 10 minutes there seems to be little or no decomposition of the organic phosphates, including phytin (I B).
4. The phosphates, organic and inorganic, are about as soluble in water as in 2 % HCl if the peas are leached in the fermented condition (comp. II A and II B). In the unfermented peas the solubility of the organic phosphates is smaller, but is even here considerable and must lead to great losses in sufficient water (comp. I A and I B).
5. There is more Ca and less K in the "Avesta" than in the "Torsdag II" peas. (Cf. table 2.)



Table 4.

Composition of extracts from hard-cooking "Avesta" and soft-cooking "Torsdag II" peas.  
With and without enzymatic fermentation.

- I. First boiled 10 minutes (to kill enzymes), then digested in water at 37° C for 8 days.  
*Unfermented.*
- A. Extracted with water.  
B. Extracted with 2 % HCl.
- II. First digested in water at 37° C for 8 days, then boiled 10 minutes. *Fermented.*
- A. Extracted with water.  
B. Extracted with 2 % HCl.

Extract	Mgm P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> /100 g peas				M.e./100 g peas			Organic matter %	N total %
	Total	Inor- ganic	Orga- nic	Phytin	Ca	Mg	K		
"Avesta":									
I: Unfermented.									
A(H <sub>2</sub> O)	314	96	218	124	1.76	6.43	17.62	11.23	.63
B(HCl)	565	74	491	160	4.15	9.69	21.76	38.11	1.82
II: Fermented.									
A(H <sub>2</sub> O)	570	383	187	52	1.43	6.40	17.62	13.98	1.20
B(HCl)	551	372	179	62	4.28	9.46	20.55	44.36	2.00
"Torsdag II":									
I: Unfermented.									
A(H <sub>2</sub> O)	438	93	345	310	1.13	6.82	18.60	11.42	.53
B(HCl)	636	56	580	326	3.14	9.61	23.20	29.75	1.56
II: Fermented.									
A(H <sub>2</sub> O)	644	551	94	36	.96	6.48	18.55	11.75	.99
B(HCl)	659	546	112	47	3.14	9.62	22.69	39.96	1.70

6. The major portions of Mg and K follow the phosphoric acid whereas the largest fraction of Ca is tied up in the peas in a different combination and is soluble only in acid solution (comp. II A and II B).

7. There is more Ca in the water extract from the unfermented peas than from the fermented peas (comp. I A and II A). We shall see later that Ca follows the phytin.

8. The organic matter and the nitrogen content of the extracts indicate that there are other forms of enzymatic action in soaking peas, but there is nothing in the following pages which has a bearing on this problem, which will therefore not be discussed.

It should be added that the phytase activity is much greater in pea flour than in whole peas. Thus the phytin-P<sub>2</sub>O<sub>5</sub> in the middlings from the soft-cooking S-peas fell from 680 mg/100 g to 304 mg after 3 hours of soaking at 20° C. After 24 hours the phytin-P<sub>2</sub>O<sub>5</sub> was reduced to

55 mg or less than 10 % the original amount. After 8 days of soaking there was no phytin left in the middlings.

On the basis of the theory that phytin acts as a Ca precipitant we are now able to explain the aforementioned effects of soaking and leaching on the cookability of peas:

1. Prolonged soaking causes a decomposition of the phytin. The lower inositol phosphates and the inorganic phosphates do not precipitate Ca at the pH of the peas. The liberated Ca ions combine with the acidoids and make these less soluble.

2. Boiling for 10 minutes inactivates the phytase and prevents the decomposition of phytin. The peas retain, therefore, their cookability even after prolonged soaking, provided there is no leaching.

3. If the peas are leached they will lose both phytin and phosphates whether the phytase is inactivated by boiling or not. The peas will lose some phytin-combined Ca, but they will lose relatively much more monovalent cations.

The dilution will cause the divalent cations to displace monovalent cations in combination with the acidoids, with the result that the leaching will leave the latter more saturated with divalent cations in accordance with the Donnan equilibrium (MATTSON 1945).

The reader might have found a flaw in this reasoning, for if phytin is the all important Ca-precipitant, it should have fulfilled its function before the leaching and should then not be leachable or, if leachable in the colloidal condition, should remove all the Ca it can precipitate. But it will be shown later that phytin is a better Ca-precipitant (precipitates at a lower pH) in a hot solution. The main effect of phytin starts with the boiling.

## 8. Phytase.

If it could be shown that peas which have been inactivated by 10 minutes boiling, and which therefore remain cookable after prolonged soaking, can be made uncookable if soaked in the presence of added phytase we would have a conclusive confirmation of the theory outlined.

Phytase was therefore prepared according to the method of ADLER (1916).

One kg of green, 15 days old barley sprouts were ground in a meat grinder and digested for 10 hours in 3.5 liters 25 % alcohol. The liquid was siphoned off and filtered through folded filter papers to remove strach grains. One part of the yellow filtrate was added to 3  $\frac{1}{2}$  parts

of 95 % alcohol. The voluminous precipitate was separated by decantation and washed in the centrifuge: two times with 95 % alcohol, one time with absolute alcohol + ether, 1 : 1 mixture, and finally two times with ether. The product, a grayish white powder, was dried in a desiccator over  $\text{H}_2\text{SO}_4$ . Yield: 7.0 grams.

This method for preparing phytase is the same as the method in use for preparing diastase.

Two 20 gram-samples of "Gyllen" peas (Ultuna farm 1944) were each allowed to swell in 30 cc water for 4 hours. The containers were then placed in a boiling water-bath for 10 minutes and then rapidly cooled. One gram of the phytase-containing product was now added to the peas in one of the flasks and after the addition of a little toluol both flasks were placed in a locker where the temperature was kept around 37° C.

After 8 days the phytase-treated peas were found to be uncookable whilst the untreated peas were as cookable as the original "Gyllen" peas. There is but one conclusion: the peas become uncookable upon soaking because the phytin is split by phytase.

## 9. Composition and properties of phytin.

Phytin (inositol hexa-phosphoric acid) was prepared by the method of CLARK as described by BOUTWELL (1917).

The method will be here briefly outlined because it gives important information about the properties of phytin.

Two and a half kg wheat bran was digested 5 hours with 10 liters 2 %  $\text{HCl}$  at 20° C. (The acid kills the phytase.) The solution is filtered through cheese cloth, allowed to settle overnight, siphoned off, heated to boiling to precipitate the proteins, cooled, allowed to settle and again siphoned off. The solution is now heated to boiling, made slightly alkaline with  $\text{NH}_3$  and boiled a short time. The precipitate is filtered off, washed with hot water and then dissolved in 2 liters 8 % acetic acid. The solution is filtered to remove the insoluble residue. *On boiling the solution phytin is precipitated but redissolves on cooling.* The solution is again filtered to remove insoluble residue. The filtrate is diluted with an equal volume of water, heated to boiling and again made slightly alkaline with  $\text{NH}_3$ . The precipitate is filtered off and thoroughly washed with boiling water. It is then extracted with a minimum amount of 8 % acetic acid. The insoluble residue is filtered off and discarded. The acetic acid solution is heated to boiling to precipi-

tate the phytin which is filtered off while still hot and washed with hot water. The phytin is washed with alcohol and ether and dried at room temperature. Yield: 28.8 grams.

The filtrate from the last precipitation is said to contain inorganic phosphates. The filtrate was made slightly alkaline with  $\text{NH}_3$ , the "phosphates" filtered off and washed, first with hot water and then with alcohol and ether and dried at room temperature. Yield: 36.7 grams.

The composition of the phytin and the "phosphates" is given in table 5. The figures show that the phytin contains most of the Ca and Mn whereas the "phosphates", which do not precipitate from a hot 8 % acetic acid solution, contain most of the Mg. The phytin contains 0.883 mole of divalent cations per mole  $\text{PO}_4$  while the "phosphates" contain only 0.793 mole of such cations. The latter evidently contain more monovalent cations.

It was found that the "phosphates" contained very little inorganic phosphorous (out of 47.01 %  $\text{P}_2\text{O}_5$  only 0.21 % was inorganic). When the "phosphates" were dissolved in 8 % acetic acid and  $\text{CaCl}_2$  was added to the solution practically all of the phosphorous could be precipitated on boiling. The "phosphates" consisted of phytin which had not been precipitated as such in the above described preparation simply because the solution lacked a sufficient amount of Ca.

This conclusion was confirmed by a determination of the phytin content of the "phosphates" by the method of HARRIS and MOSHER (1934). This consists in titrating the sample, dissolved in 0.6 % HCl solution, with standard  $\text{FeCl}_3$  in the presence of  $\text{NH}_4\text{SCN}$  as indicator. 92.96 % of the "phosphate"- $\text{P}_2\text{O}_5$  was thus found to be phytin- $\text{P}_2\text{O}_5$ .

The Ca-phytinate (table 5) was prepared by dissolving phytin in a minimum of 8 % acetic acid, adding an excess of  $\text{CaCl}_2$ , reprecipitating by boiling, and washing the precipitate with a hot solution of  $\text{CaCl}_2$ . After repeating this four times, the last precipitation being done by neutralizing with  $\text{NH}_3$ , we obtained a phytin which was 96.1 % saturated with Ca, 1.1 % with Mg and 0.5 % with Mn (cf. table 5). The remainder consisted chiefly of  $\text{NH}_4$  and perhaps a small residue of alkali cations.

The Mg-phytinate was prepared by repeated precipitation in the presence of  $\text{MgCl}_2$  after first removing the Ca as oxalate.

The ferric phytinate was prepared by dissolving phytin in 0.6 % HCl, adding an excess of  $\text{FeCl}_3$  and washing the white precipitate with 0.05 n. HCl solution.

From table 5 it is obvious that the 12-valent inositol hexa-phosphoric acid forms compounds of indefinite composition all depending on the

Table 5.

The composition of (wheat) phytin (precipitated from a hot 8 % acetic acid solution), and "phosphates" (precipitated by adding a slight excess of  $\text{NH}_3$  to the filtrate from the phytin), and the composition of the prepared compounds (see text): Ca-phytinate, Mg-phytinate (both neutral) and acid ferric phytinate.

Compound	Percent of dry weight					Moles per mole $\text{PO}_4$			
	CaO	MgO	MnO	$\text{Fe}_2\text{O}_3$	$\text{P}_2\text{O}_5$	Ca	Mg	Mn	Fe
Phytin.....	7.19	17.84	.594	—	46.49	.195	.675	.013	—
"Phosphates"....	1.47	20.07	.040	—	47.01	.040	.752	.001	—
Ca-phytinate .....	32.83	.26	.205	—	43.24	.961	.011	.005	—
Mg-phytinate .....	.00	24.82	.430	—	45.92	.000	.952	.009	—
Fe-phytinate .....	—	—	—	26.87	46.39	—	—	—	.516

ionic environment. As a matter of fact the insoluble phytinates possess the properties of cation exchange, as the following preliminary experiment shows. Upon leaching 1 gram of Ca-phytinate with 300 cc 1 n.  $\text{NH}_4\text{Cl}$ , 0.783 m.e. of Ca was displaced. After washing free from chlorides the adsorbed  $\text{NH}_3$  was distilled off and found to be 0.895 m.e. That there is no exact equivalence between  $\text{NH}_4$  and Ca depends, among other things, on the fact that the Ca-phytinate already contained some  $\text{NH}_3$ .

A closer study of the composition of these relatively simple exchange compounds would be interesting. How far can the divalent cations be displaced by the monovalent cations before the compound dissolves? Tri-calcium phytinate,  $\text{Ca}_3(\text{HPO}_4)_6 \cdot \text{C}_6\text{H}_6$ , is a soluble compound. The higher, insoluble phytinates of Ca possess cation exchange properties apparently because of their multivalent condition. Phytin thus occupies an intermediate position between colloids and simple electrolytes.

The ferric phytinate was found to possess the greatest cation exchange capacity observed by the writer. By leaching with neutral Ca-acetate, washing free from soluble Ca and displacing the adsorbed Ca with  $\text{NH}_4\text{Cl}$  solution we found an exchange capacity of 3.36 m.e. per gram (duplicates were 3.35 and 3.38 m.e.).

This makes 0.518 m.e. exchangeable cations per m.mol  $\text{PO}_4$ . Since there is 0.516 m.mol = 1.548 m.e. Fe per m.mol  $\text{PO}_4$  we get  $1.548 + 0.518 = 2.066$  m.e. cations per m.mol inositol-bound- $\text{PO}_4$ . This is a little too large but is accounted for by the fact that as the ferric phytinate is neutralized it undergoes hydrolysis (it turns yellowish) and this partial hydrolysis creates free acidoid groups which become engaged

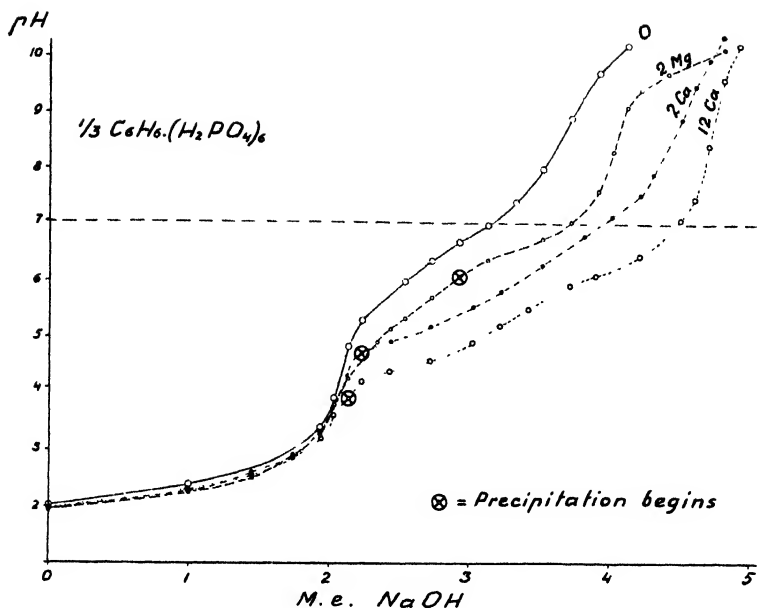


Fig. 6. Titration curves of systems containing  $\frac{1}{3}$  m.mol. inositol-phosphoric acid (phytin) (= 2 m.mols inositol-bound- $PO_4$ ) in an initial volume of 200 cc, with and without the addition of  $MgCl_2$  and  $CaCl_2$ . Large circles indicate the beginning of precipitation.

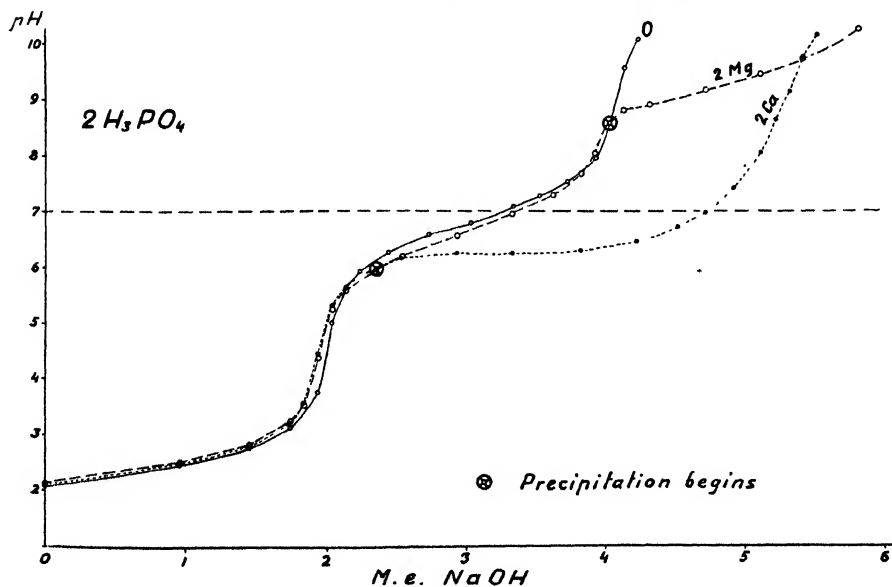


Fig. 7. Titration curves of phosphoric acid under the same conditions as in fig. 6.

in the exchange reaction. The reaction is similar to that of the isoelectric phosphates studied by MATTSON (1931). For ferric phosphate MATTSON found an exchange capacity as high as 0.503 m.e.  $\text{NH}_4$  per m.mol  $\text{PO}_4$  but only 2.37 m.e. per gram.

Na-phytinate was prepared by adding a little less than the equivalent amount of oxalic acid to a suspension of Ca-phytinate, the Ca-oxalate being filtered off after 24 hours and the filtrate neutralized with NaOH and again filtered to remove excess Ca-phytinate and residual oxalate. The Na-phytinate solution was standardized and used in that form.

*For our present problem the most important properties of phytin is its function in the peas as a Ca- and Mg-precipitant. A cation precipitant, of the nature of a weak acid, whose precipitation threshold lies just below the pH of the system will act as a buffer for the cation precipitated just as it acts as a buffer for the H-ion. A change in pH will cause a change in the concentration of the cations precipitated by such a precipitant. This principle, which must play a very important role in the physiology of plants, constitutes the most important factor in the cookability of peas.*

Fig. 6 shows the titration curves obtained by titrating with NaOH  $\frac{1}{3}$  m.mol  $\text{C}_6\text{H}_6 \cdot (\text{H}_2\text{PO}_4)_6$ , corresponding to 2 m.mol  $\text{PO}_4$ , in an initial volume of 200 cc, alone (0) and in the presence of 2 m.mols  $\text{MgCl}_2$ , 2 m.mols  $\text{CaCl}_2$  and 12 m.mols  $\text{CaCl}_2$ . The pH at which precipitation begins is noted by large circles.

With equivalent proportions of cations and  $\text{PO}_4$  the Mg-phytinate begins to precipitate at pH 6.05 while the Ca-phytinate begins to precipitate at pH 4.70. With 12 m.mols of  $\text{CaCl}_2$  the precipitation begins at pH 3.93. There is no precipitation in either case until the secondary salt has begun to form, the primary,  $\text{M}_3(\text{HPO}_4)_6 \cdot \text{C}_6\text{H}_6$ , being soluble.

Fig. 7 shows the corresponding curves obtained by titrating with NaOH 2 m.mols  $\text{H}_3\text{PO}_4$ , in an initial volume of 200 cc, alone and in the presence of 2 m.mols  $\text{MgCl}_2$  and 2 m.mols  $\text{CaCl}_2$ .

The Mg-phosphate begins to precipitate at pH 8.60 and the Ca-phosphate at pH 5.98.

The phosphate ion thus requires a much higher pH to precipitate Mg and Ca ions than the phytinate ion.

Note the strong buffering capacity of the systems within the range of precipitation. Between pH 6.20 and 6.30 the Ca-phosphate system consumes 1.20 m.e. NaOH. The importance of such cation-precipitant-buffer systems for plant physiology will be readily appreciated.

Fig. 8 shows the progressive precipitation of Mg and Ca as phytinate when systems containing  $\frac{1}{3}$  m.mol  $\text{C}_6\text{H}_6(\text{H}_2\text{PO}_4)_6 + 2$  m.mols  $\text{MgCl}_2$  or  $\text{CaCl}_2$  were neutralized with NaOH in a final volume of 200 cc.

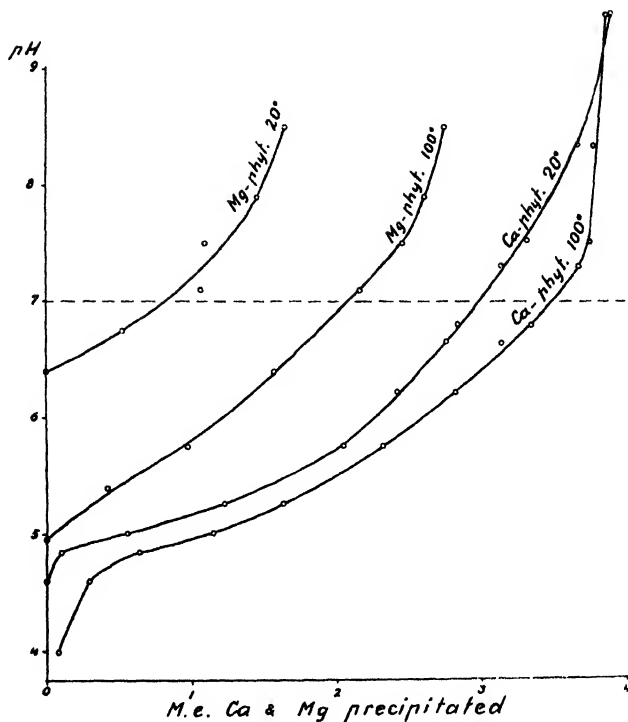


Fig. 8. The precipitation as a function of pH of Ca- and Mg-phytinates in systems containing 2 m.mols inositol-bound- $\text{PO}_4$  and 2 m.mols  $\text{CaCl}_2$  or  $\text{MgCl}_2$  in a volume of 200 cc, at 20° and at 100° C. pH adjusted by NaOH.

Each point on the curve represents a separate system. After the addition of NaOH to the mixture of inositol hexa-phosphoric acid and chloride, a series with each cation was left to stand overnight in the constant temperature room at 20° C. The solutions were then filtered through dry filter papers and the Mg and Ca were determined in aliquots of the filtrate. The precipitated amount was then obtained by difference. Another series with each cation was heated to 100° C under a reflux condenser, rapidly filtered under cover while still hot, cooled and the Mg and Ca determined as in the cold series.

We note that the precipitation occurs at a considerably lower pH in the hot solutions, a fact which is of importance for the cooking process of peas. At the pH of the peas, i. e. a pH about 6, the phytin can function as a Mg-precipitant only at the boiling temperature. Since the pea phytin is chiefly saturated with Mg and K, and only to a relatively small degree with Ca (table 4, I A), we can readily understand why this com-



pound can be leached out of the peas by cold water, leaving the pea acidoids more or less completely saturated with Ca ions (a saturation which is enhanced by the dilution effect on the Donnan equilibrium). When unleached peas are boiled the phytin precipitates both Mg and Ca ions and removes these from their combination with the pea acidoids, which thus become saturated with monovalent cations. In the leached peas there is no phytin to precipitate Ca and Mg when the peas are boiled. Such peas do not cook.

Our next problem is to establish the nature of the acidoids which, in the Ca and Mg saturated condition, make the peas uncookable.

### 10. The properties of pectin and the pectinate-phytinate system.

The function of phytin as a Ca- and Mg-precipitant explains why peas possessing a high phytin content are soft-cooking, why they become hard-cooking when the phytin is decomposed by phytase as a result of soaking or when the pH is lowered below the range of active precipitation. But it does not account for the fact that the peas again become soft-cooking if the pH is lowered below the point of minimum cookability.

The factor which determines the cookability of the peas within the lower range of pH must be sought in the strength of the acidoids with which the Ca and Mg are combined and in the solubility in acid solution of these compounds.

These acidoids cannot be the amphoteric legumin because the proteins are weak acidoids and bind bases only at relatively high pH (fig. 9). MATTSON and ANDERSON (1945) have shown that the polyuronides, of which pectin is an important member, constitute an important group of strong plant acidoids. We have seen that the uronic acid content of peas may amount to over 5 %, and we know that the middle lamella consists of pectic substances. We had therefore reason to suspect that pectin is the acidoid which dominates the ionic reactions and colloidal behavior of the pea colloids.

If the cooking of peas depends on the solvation of the pectin which, in the Ca and Mg saturated condition, binds the cells together, a study of the behavior of a material rich in pectin and poor in protein ought to yield useful information. For this purpose grape fruit albedo (the white portion of the rind) was selected.

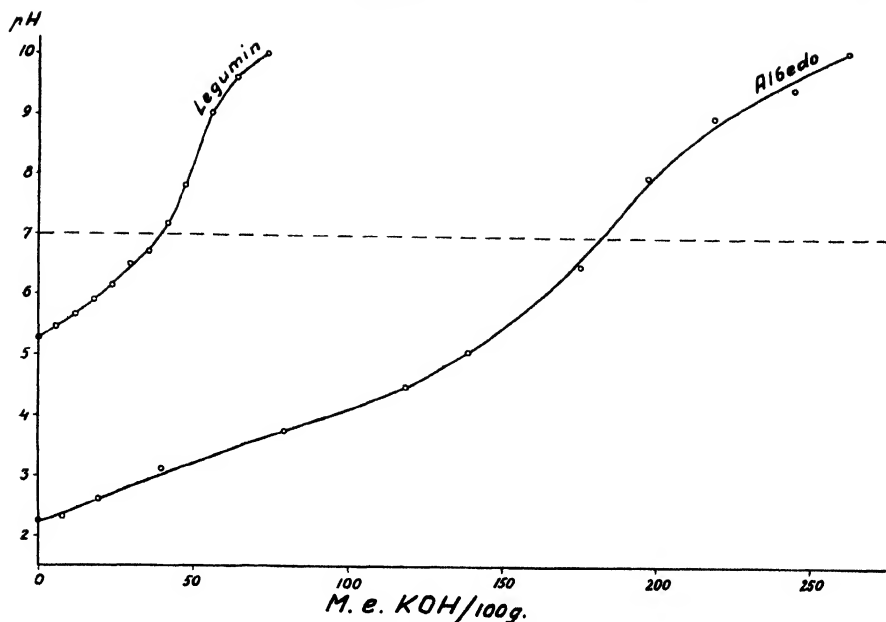


Fig. 9. The titration curves of electrodialyzed legumin and grape fruit albedo (white portion of rind) by KOH in 1 n. KCl (1: 20).

Fig. 9 shows the titration curve of the electrodialyzed albedo compared with that of legumin<sup>1</sup>.

We note that the albedo, which contains perhaps between 30 and 40 % pectin (WILSON 1925), is a strong acidoid ( $\text{pH}_u = 2.25$ ) and possesses a high base binding capacity (183 m.e./100 g at pH 7) whereas the legumin is a much weaker acidoid ( $\text{pH}_u = 5.27$ ) and binds much less base (39 m.e./100 g at pH 7). The nitrogen content was 0.65 % in the albedo and 16.38 % in the legumin.

Whole pieces of grape fruit albedo were saturated with Ca and Na ions by repeated treatments with the respective 1 n. chloride solutions. The Ca-saturated product was leathery and did not swell, whereas the Na-saturated swelled enormously, even before the salt was removed by leaching. Portions of 0.1 gram of the dried and powdered samples were heated in 20 cc solution for 30 minutes at 70° C at various pH

<sup>1</sup> The legumin was prepared by digesting 500 grams pea flour in 4 liters 0.02 n. KOH solution for two days in the ice box. The extract was decanted and the legumin was precipitated with HCl at a pH about 4.5. The precipitate was washed, first with water and then with absolute alcohol and finally with ether. The legumin was then electro-dialyzed.

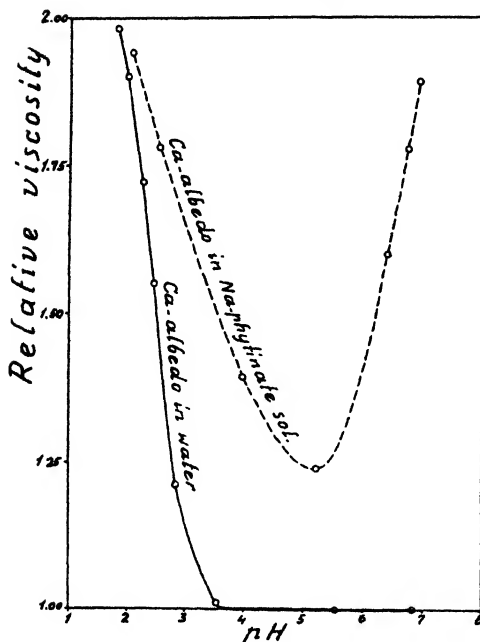


Fig. 10. The relative viscosity as a function of pH of a pectin solution obtained by heating 0.1 g Ca-saturated albedo in 20 cc water at 70° for 30 minutes with and without the presence of Na-phytinate. The pH was adjusted by HCl and NaOH.

(adjusted by HCl or NaOH), the Ca-albedo with and without Na-phytinate. The relative viscosity of the filtered solutions was then measured at 20° C by the Ostwald viscosimeter. The results are shown graphically in fig. 10.

The Ca-saturated albedo yields a viscous solution of pectin below pH 3.5. At higher pH it is insoluble if no Ca precipitant is added. The addition of Na-phytinate equivalent to 0.4 millimols  $\text{PO}_4$  per 0.1 gram albedo yields a U-shaped curve showing a minimum in viscosity about a pH of 5. This minimum in the solubility of the citrus pectin in the presence of Na-phytinate corresponds therefore closely to the minimum in cookability of the peas.

The Na-saturated albedo had apparently lost pectin during its preparation for it yielded solutions of relatively low viscosities, giving  $\eta_1/\eta_0$  values from 1.50 to 1.58 between pH 1.72 and 5.72. But there was no minimum as in the case of the Ca-albedo.

The experiment allows us to draw the following conclusion:

At low pH the Ca-pectinate is dissolved by the HCl and converted into soluble H-pectinate. At high pH in the presence of Na-phytinate,

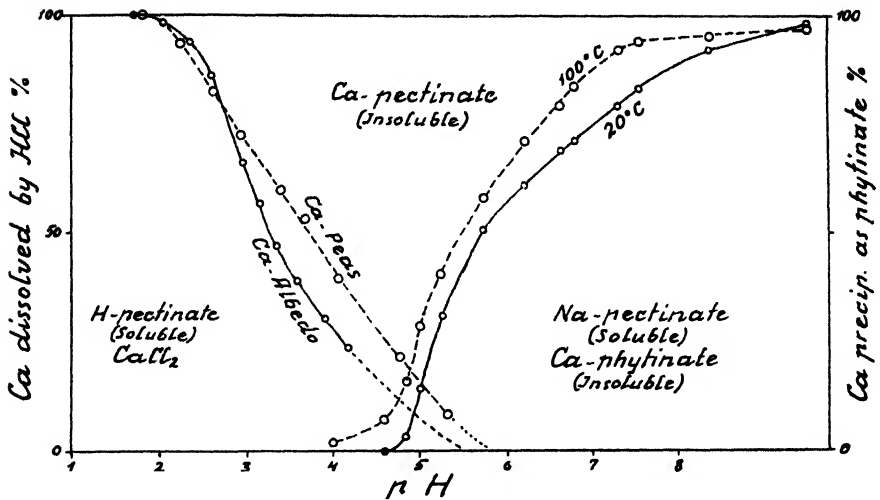


Fig. 11. Curves showing the desaturation of Ca-saturated peas and Ca-saturated albedo by HCl (left side) and the precipitation of Ca-phytinate as a function of the pH (right side, curves adapted from fig. 8). Note that the maximum in Ca-pectinate corresponds to the minimum in cookability of the peas in fig. 2.

Ca-phytinate is precipitated and the pectin is converted into soluble Na-pectinate.

These reactions are graphically shown in fig. 11.

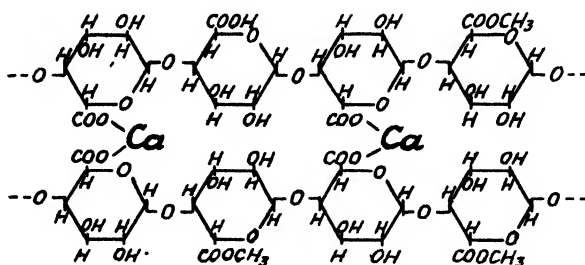
The curves on the left side show the percent of the total Ca which was dissolved when 2.5 gram portions of Ca-saturated grape fruit albedo and 5 gram portions of Ca-saturated peas were extracted with 200 cc HCl solutions containing increasing amounts of acid. The total amount of exchangeable Ca was 48.50 m.e./100 g in the albedo, and 15.69 m.e./100 g in the peas. Note that the two materials become desaturated with Ca within the same range of pH, indicating that their acidoids are of the same strength. Legumin gives off its Ca at much higher pH.

The curves on the right side in fig. 11 show the percent of Ca precipitated when NaOH was added to an acidified solution containing 4 m.e.  $\text{CaCl}_2$  together with Na-phytinate equivalent to 2 millimols  $\text{PO}_4$  in 200 cc. The curves are adapted from figure 8.

We note that the intersections of the two pair of curves occur between pH 4.75 and 5, or at pH values which closely correspond to the minimum in viscosity of the filtrate from the Ca-saturated albedo in the presence of phytinate (fig. 10) and to the minimum in cookability of the peas (fig. 2). This minimum corresponds to a maximum in the Ca-pectinate content.

According to MYERS and BAKER (1934) unhydrolyzed lemon pectin is monoarabino-monogalacto-diacetyl-heptamethoxyl-octagalacturonic acid. A polymer of this nucleus forms long chains. In Ca-pectinate the galacturonic acid chains are linked together by the divalent Ca ions which, according to BONNER (1936), are shared by carboxyl groups belonging to different molecular chains.

This cross linkage is pictured by BAKER and GOODWIN (1941) by the structure:

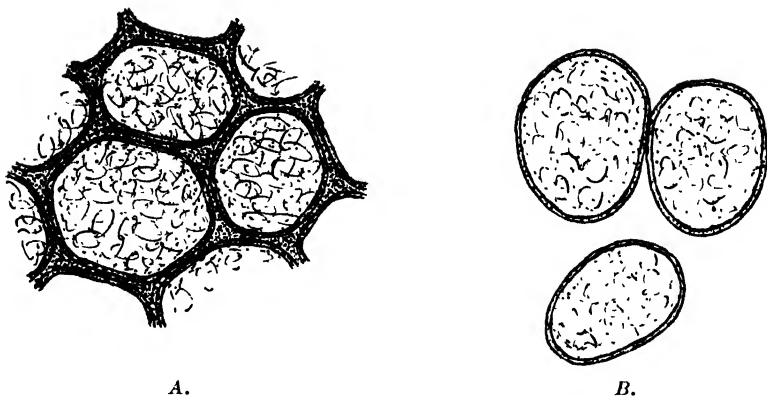


Pectin, which is a highly hydrophilic colloid, is very soluble when saturated with monovalent cations.

Fig. 11 thus explains the role of both pectin and phytin, and accounts for the behavior of peas with respect to their cooking qualities. The pectin exists in equilibrium with all the free cations in the solution. If the phytin content is low, more of the Ca will combine with the pectin and the peas will be hard-cooking. A high phytin content will precipitate a greater amount of the divalent cations, Ca and Mg, and leave the pectin in combination with an equivalent quantity of monovalent cations. This makes the peas soft-cooking.

Fig. 10 shows that the Ca-saturated citrus pectin begins to dissolve at pH 3.5. According to fig. 11 the pectin has lost 42 % of its Ca at this pH and is thus saturated with H ions to the extent of 42 % when it begins to dissolve.

The addition of Na-phytinate (fig. 10) increases the solubility of the pectin not only at high pH, where it acts as a Ca-precipitant, but extends its solvent action over on the acid side of the minimum. This must be due to a partial displacement of Ca by the Na ions. Even NaCl will produce this effect. This displacement of divalent by monovalent cations is still more evident in the Mg-saturated samples. Mg is less active than Ca and its effects are more easily suppressed. Thus although Mg-phytinate requires somewhat higher pH than Ca-phytinate for its precipitation, Mg-saturated peas are more affected and yield



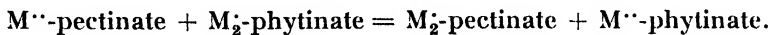
*Fig. 12. A. Appearance of cells of uncooked peas. The middle lamella is stained deep blue with methylene blue. B. Cells of cooked peas. The middle lamella has dissolved away. The cells are only faintly stained by the dye.*

more narrow minima in cookability upon the addition of Na-phytate (fig. 17).

The colloid chemical mechanism of the cooking of peas, which is graphically illustrated in fig. 11 may be studied in the microscope.

When thin slices of uncooked peas are examined in the microscope the cell walls and lamella show the somewhat hexagonal structure represented in fig. 12 A. The cells are filled with starch and aleurum grains. If the cells are treated with methylene blue (a basic dye which combines by exchange with the acidoids, MATTSON 1942) the cell walls and the lamella are stained deep blue. The contents of the cells are only faintly stained. If the peas are Ca-saturated, and therefore uncookable, they show the same structure and the same staining even after prolonged boiling. If the peas are Na-saturated, a few minutes of heating will cause the lamella to swell and dissolve and the cells to fall apart. The unruptured cells, which are now oval-shaped and thin-walled, are still filled with aleurum grains (fig. 12 B). The legumin still forms a part of the cell content. But the pectin of the middle lamella has been dissolved away. Even the pectin of the cell wall must have dissolved because the membranes do not now stain any deeper than the contents of the cell.

The cookability of peas is governed by the reaction:



## 11. Cooking experiments with variously prepared peas.

Nearly 300 cooking experiments have been made with the cooker shown in fig. 3. A selection of the curves thus obtained will be shown here.

Most of the experiments were carried out with specially prepared "Gyllen" peas (Ultuna farm 1944). The treatments were as follows:

*Soaked peas:* The peas were soaked for 8 days in a minimum of water at 20° C and then dried in the air.

*Leached peas:* The peas were first soaked 8 days and then suspended in a bag of cheese cloth in a 20 liter cylinder, filled with distilled water, and allowed to leach for 8 days. The water was changed twice. The peas were then dried in the air.

*Ca-saturated peas:* The peas were soaked in 1 n.  $\text{CaCl}_2$ , the solution being changed daily for 10 days. The peas were then washed with several changes of water and suspended in a bag of cheese cloth in 20 liters of distilled water. The water was changed until it gave no reaction for Cl ion. The peas were then dried in the air.

*Mg-saturated peas:* Prepared as the Ca-saturated but with  $\text{MgCl}_2$ .

*K-saturated peas:* Prepared as the Ca-saturated but with KCl.

*Na-saturated peas:* Prepared as the Ca-saturated but with NaCl. A second batch of Na-saturated peas was prepared by subjecting a part of the first batch to another 10 days' treatment with NaCl solution.

*H-saturated peas:* The peas were extracted with 8 % acetic acid until all the Ca was removed. They were then leached in large volumes of water and dried in the air.

In all of these preparations toluol was used to prevent decomposition by microorganisms.

Table 6 shows how the treatments have affected the composition of the peas with respect to the phosphoric acid and the Ca and Mg content.

We note that the soaking has reduced the phytin to less than one half and the organic  $\text{P}_2\text{O}_5$  to less than one third of the original content. The inorganic phosphate content is therefore very high in the soaked peas.

The leached peas contain only 136 mg  $\text{P}_2\text{O}_5$ . Most of this is in the form of phytin. The inorganic  $\text{P}_2\text{O}_5$  is very low in the leached peas.

The Ca-saturated peas contain 278 mg  $\text{P}_2\text{O}_5$  despite the leaching. Of this 256 mg is in the form of phytin. The Ca evidently renders the phytin more insoluble and more resistant to the action of phytase. Note that the peas bind nearly twice as much Ca as Mg.

Table 6.

The composition of untreated and specially prepared "Gyllen" (1944) peas. The peas were ground and extracted with 4 % HCl.

Treatment	Mgm P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> /100 g peas <sup>1</sup>				M.e./100 g peas <sup>1</sup>		
	Total	In-organic	Organic	Phytin	Ca	Mg	K
Untreated.....	687	74	613	387	3.40	10.51	23.06
Soaked 8 days.....	700	501	199	183	3.42	10.58	23.48
Leached 8 days.....	136	5	131	100	2.46	3.25	3.34
Ca-saturated.....	278	19	259	256	18.33	.43	—
Mg-saturated.....	162	17	145	56	.57	9.98	—
K-saturated.....	83	10	73	35	.84	.28	—
Na-saturated I.....	—	—	—	—	.29	.54	—
Do II.....	45	10	35	0	.00	.36	—
H-saturated.....	603	9	594	400	.00	.00	—

The phosphorous content of the Ca-, Mg-, K- and Na-saturated peas is in the order

$$\text{Ca} > \text{Mg} > \text{K} > \text{Na}.$$

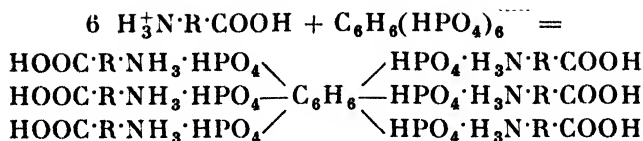
## 12. Protein phytinates.

The most remarkable thing in the table is the composition of the acetic acid treated, H-saturated peas. The Ca and Mg have been completely removed but the organic phosphates, including phytin, are still very high (since the peas have lost both minerals and organic matter the values for the treated peas are larger than they would be if expressed on the basis of 100 grams of original peas).

The question arises: what makes the organic phosphates insoluble in the acetic acid-treated peas? Since phytin by itself is soluble in 8 % acetic acid, it must have been precipitated by some organic cations in the peas. At pH below their isoelectric point the proteins become cationic ( $\text{H}_3^+\text{N}^+\text{R}\cdot\text{COOH}$ ). In 8 % acetic acid phytin can form the hexavalent inositol-hexaphosphate anion,  $\text{C}_6\text{H}_6(\text{HPO}_4)_3$ . This ion might be expected to be powerfully attracted by the protein cations and link these together forming large molecular complexes which, having lost their charge, must coagulate isoelectrically:

<sup>1</sup> Per 100 grams treated peas.





To test this theory a little legumin was dissolved in 8 % acetic acid and filtered to get a clear solution. A little Na-phytinate was dissolved in another portion of the acetic acid solution. When the two solutions were mixed there was formed a copious, flocculent precipitate which was difficultly soluble in 1 N.HCl, was readily dissolved with a slight excess of NaOH but which was insoluble in concentrated acetic acid. The stability of the compound seems to be as great as that of ferric phytinate.

The fact may thus be considered as established that legumin, and probably other proteins, form highly insoluble phytinates in acid media. It is doubtful that phytin exists in combination with the proteins to any great extent in the original peas since it can be leached out by neutral solutions if not too highly saturated with Ca, but it seems probable that such compounds will be formed at the pH of the gastric juice in the stomach. The protein phytinates may therefore be partly responsible for the poor resorbability of phytin phosphorous which is generally accredited to Ca (MELLANBY 1925). As in the case of Ca-phytinate the protein phytinates might be expected to be more resistant to the action of phytase. The problem should be thoroughly investigated. Some data already on hand will be published separately later.

### 13. Cookability curves.

In the following study of cookability as a function of pH we let the peas soak for 42 hours at 20°. The peas were placed in a single layer in a 250 cc Erlenmeyer flask in a minimum volume of solution (100 peas in 30 cc). The pH was determined by the glass electrode in the unabsorbed liquid. The extended time was allowed for diffusion and for a closer approach to an equilibrium between the inside and outside solution. This extension by 24 hours should have no biochemical effect upon the prepared peas which had all been subjected to a prolonged soaking. But the untreated peas would suffer a considerable reduction in cookability due to phytase action (fig. 5). After 18 hours of soaking these peas were therefore brought to boil over the flame and then heated in a boiling water bath for 10 minutes under a reflux condenser. They were then rapidly cooled and left standing at 20° for the

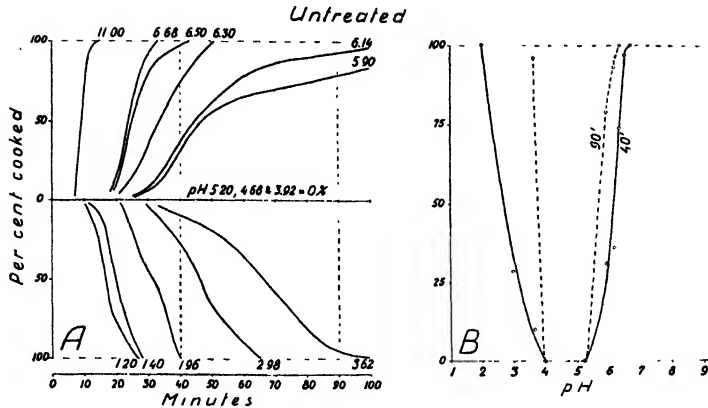


Fig. 13. A. Cookability of the untreated "Gyllen" peas at different pH. B. Percent cooked after 40 and 90 minutes as a function of pH.

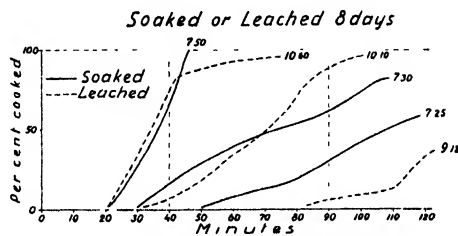


Fig. 14. Cookability of soaked and leached "Gyllen" peas at different pH.

remaining 24 hours. The 10 minutes were added to the cooking time in the apparatus.

Acid and alkali were always added in the form of HCl and NaOH. The boiling was in general continued up to 2 hours. As a rule the percentage of peas cooked increased very slowly, if at all, after 2 hours. In the case of the soaked, the leached and the Ca- and Mg-saturated peas the boiling was increased to 4 hours with no visible effect. They were all uncookable.

The cookability of the *untreated* "Gyllen" peas is shown in fig. 13. The peas were soaked in solutions of NaOH or HCl for 42 hours as explained.

The curves on the left (A) show the percentage cooked as a function of time. At pH 5.20, 4.68 and 3.92 the peas were uncookable. On either side of this minimum the cookability rapidly increases; on the alkaline side because the phytin precipitates Ca and Mg and on the acid side because the Ca-pectinate is decomposed by HCl (cf. fig. 11).

The curves on the right side (B) in fig. 13 show the percentage of peas cooked after 40 and 90 minutes as a function of the pH. These curves will be inserted for comparison in the corresponding figures of the treated peas (cf. below).

The cookability of the *soaked* and the *leached* "Gyllen" peas after being soaked 42 hours in water containing no other electrolyte than NaOH is shown in fig. 14. Both samples of peas were uncookable at their own pH.

We note that the soaked peas, in which most of the phytin has been hydrolyzed to inorganic phosphates, require a relatively high pH to regain a cookability corresponding to that of the untreated peas (fig. 13). This is because the phosphates require a higher pH than phytin to precipitate Ca and Mg (cf. fig. 6 and 7). At pH 7.50 the "soaked" peas are, however, very cookable (100 % in 47 minutes).

The leached peas, which have lost their phosphates by the leaching and which therefore contain no Ca and Mg-precipitants, require a high alkalinity (pH 10) to regain a high degree of cookability. How the OH ion here acts is difficult to say. Pectin is easily saponified in dilute solutions of NaOH leading to the formation of pectic acid, which is the completely demethoxylated form of pectin. The high solubility of Na-pectate will probably cause the pectin to dissolve even in the presence of a certain proportion of divalent cations.

The cookability in water of the soaked and leached peas as a function of the pH is shown in fig. 18.

The *H-saturated* peas, which contain no divalent cations, are very cookable at all pH (fig. 15 A). This shows that the removal of the divalent cations is the only condition necessary to make the peas soft-cooking.

The *Na-saturated* peas are easily cookable at all pH but the curves in fig. 15 B show a definite minimum around a pH of 4. This decrease in cookability is smaller the more complete the displacement of the divalent cations by the Na ions (cf. table 6 and curves marked Na I and Na II in fig. 15 B). If all the divalent cations were removed the Na-saturated peas would probably be as cookable as the "H-saturated" peas. The pH of the latter was 3.86 in pure water. When their pH was increased by NaOH they became partly Na-saturated just as the "Na-saturated" peas will be partly H-saturated when their pH is reduced by HCl.

The *K-saturated* peas (fig. 15) show a relatively high degree of cookability considering the leached condition of the peas. The minimum in cookability is, however, much more pronounced than in the case

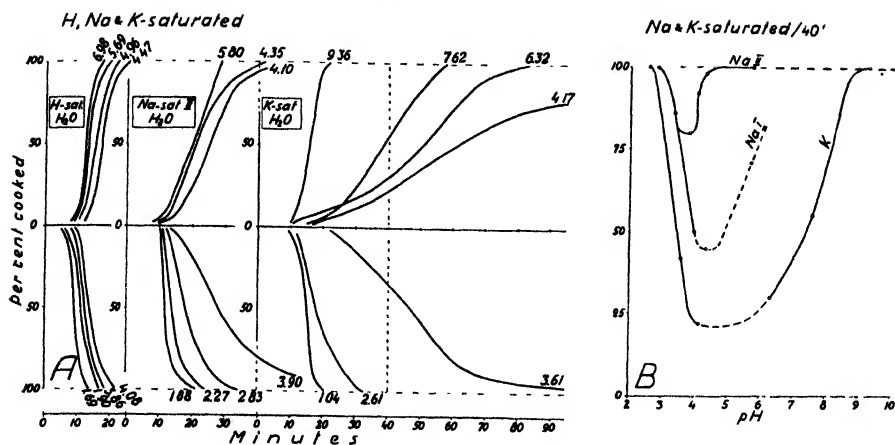


Fig. 15. A. Cookability of H-saturated, Na-saturated and K-saturated "Gyllen" peas at different pH. B. Percent cooked after 40 minutes as a function of pH. Na I = single treatment with NaCl, Na II = double treatment (see text).

of the Na-saturated peas. This can partly be ascribed to a greater residual Ca ion content in the K-saturated peas (table 6), and partly to the position of the Na and K ions in the lyotropic series. The more highly hydrated Na ions always produce a greater solvation of electro-negative colloids than the K ions.

Fig. 16 shows the cooking curves of the soaked and leached "Gyllen" peas after soaking for 42 hours in solutions of Na-phytate and  $\text{Na}_2\text{HPO}_4$ , both 0.1 molar with respect to  $\text{PO}_4$ , and in 0.2 molar NaCl, all in the proportions of 30 cc per 100 peas.

Fig. 17 shows the cooking curves of the Ca- and Mg-saturated "Gyllen" peas. The concentration and treatment is the same as in fig. 16.

Fig. 18 shows the cooking of the peas as a function of the pH (from curves in fig. 14, 16 and 17). The percentage cooked is taken at indicated intervals, 40 or 90 minutes. The curves are grouped according to the treatment of the peas.

Fig. 19 shows the same curves as in fig. 18 but the curves are here grouped according to the kind of electrolyte added.

In figures 18 and 19 the corresponding curve for the untreated peas (fig. 13 B) is inserted as a broken line for comparison.

In connection with figures 16, 17, 18 and 19 the following will be noted:

1. The leached peas require a higher pH to regain their cookability than the soaked peas (fig. 18, A and B). The difference is most marked where no Ca-precipitant (phytate or phosphate) is added, i. e., in

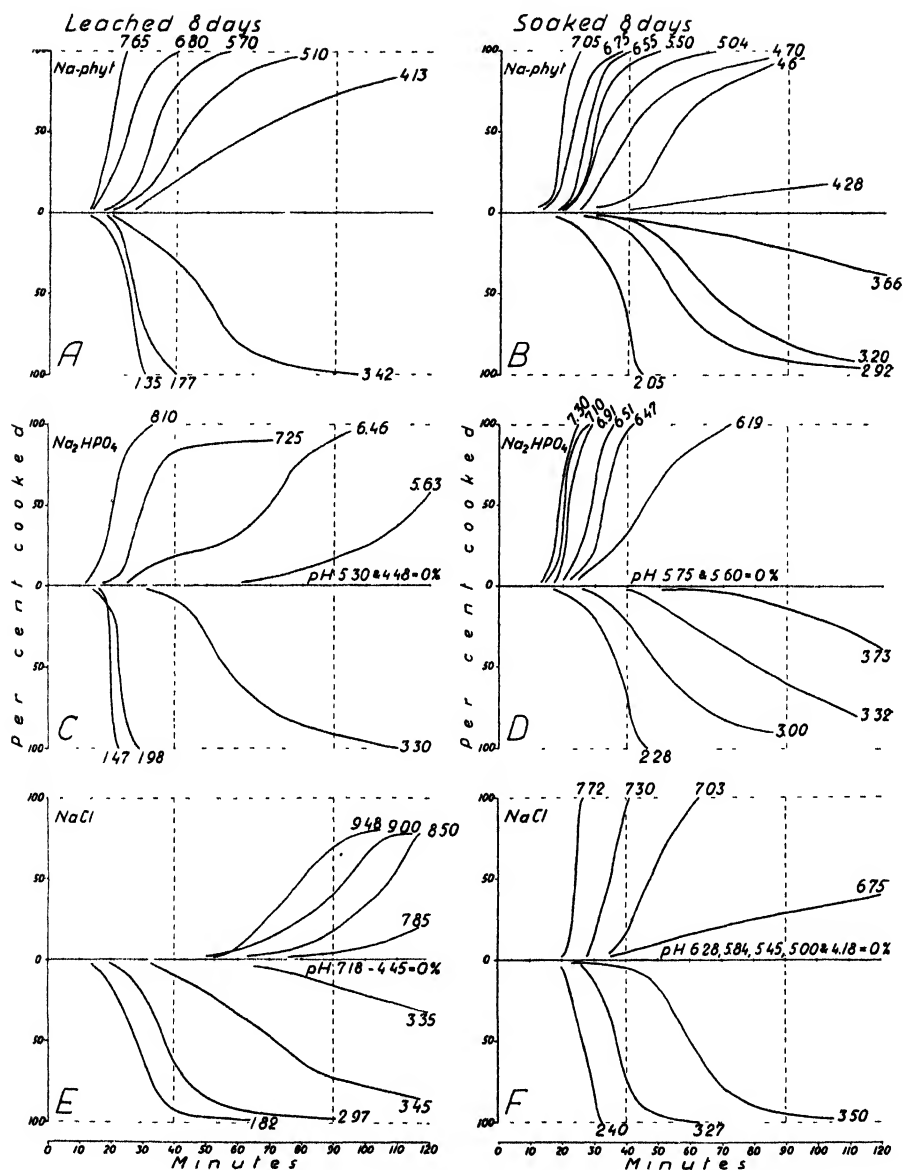


Fig. 16. Cookability of soaked and leached "Gyllen" peas after treatment with sodium phytinate, phosphate or chloride at various pH.

the NaCl- and pure water-systems. This is because the soaked peas possess a high content of inorganic phosphates and an appreciably larger quantity of phytin (table 6). In the presence of a Ca- and Mg-

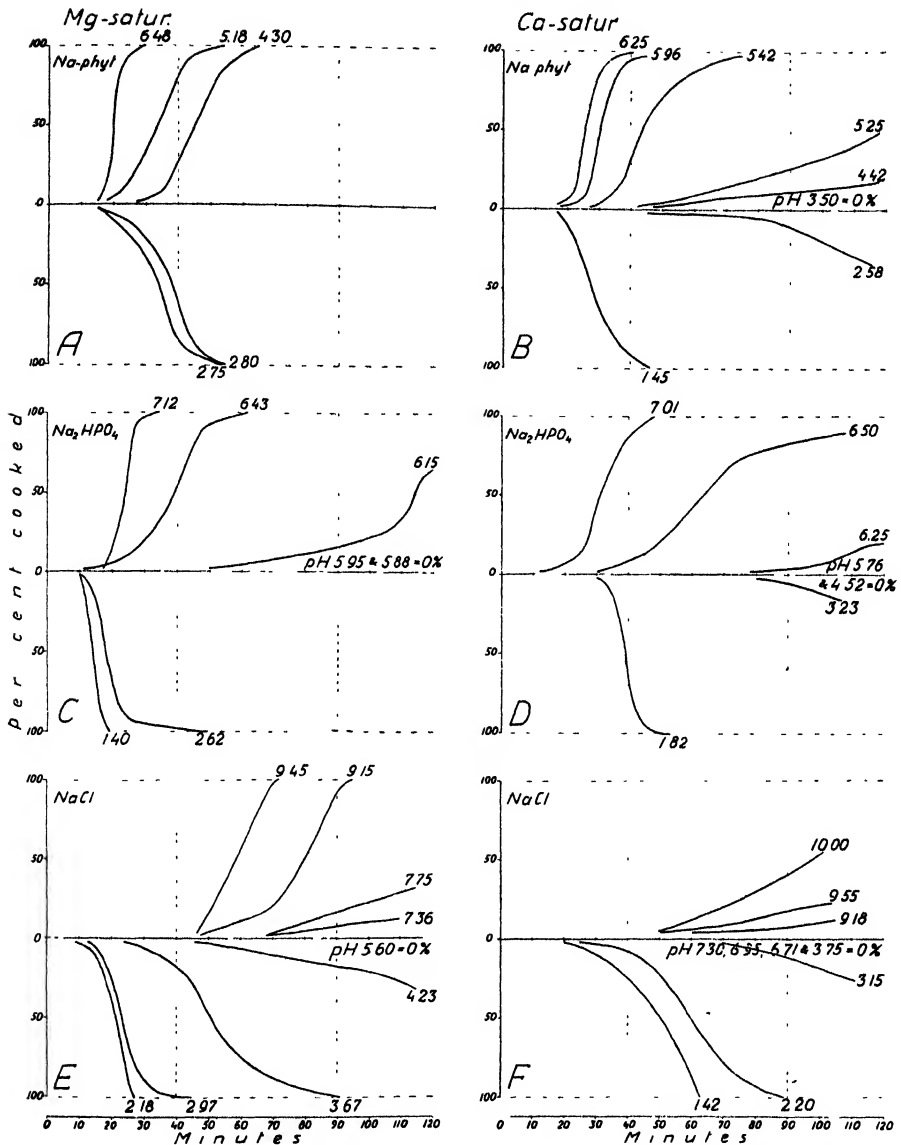


Fig. 17. Cookability of Ca- and Mg-saturated "Gyllen" peas after treatment with sodium phytate, phosphate or chloride at various pH.

precipitant the peas will become cookable within the precipitation range of that precipitant.

The minimum cookability of the leached peas in the phytate systems is not as low as that of the soaked peas. This is possibly due to

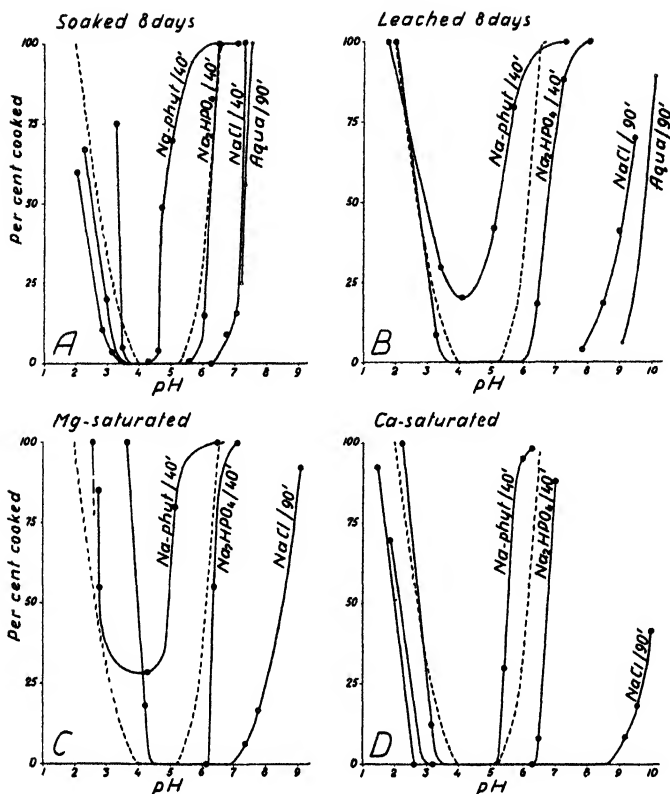


Fig. 18. Curves showing the cooking of the peas in fig. 14, 16 and 17 as a function of the pH. The percent cooked is taken at indicated intervals, 40 or 90 minutes. The curves are grouped according to the treatment of the peas.

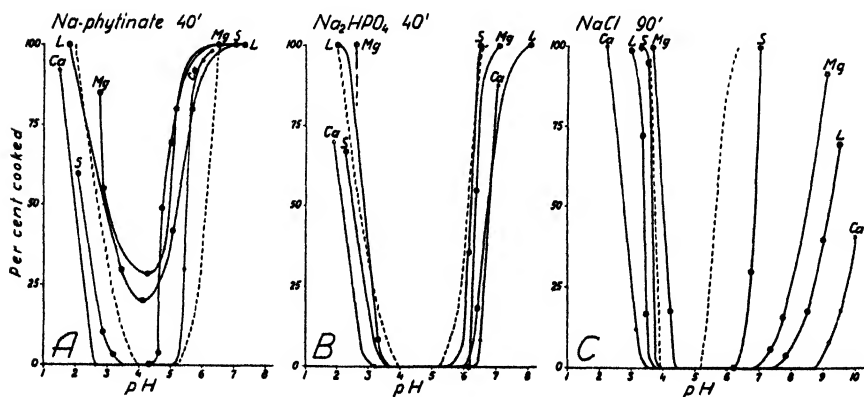


Fig. 19. The same curves as in fig. 18 but the grouping is here according to the kind of electrolyte added.

the lower Ca- and Mg-content in the former. At low pH where the phytin no longer precipitates Ca and Mg, these will be free to combine with the pectin and the greater their concentration the greater will be their hydrophobic effect. The difference in the position of the curves on the acid side of the minima seems difficult to account for. The solubility of acid pectin appears to be variously affected by the different salts.

2. The Ca-saturated peas behave much like the leached peas but require still higher pH to regain their cookability (fig. 18, B and D). The Mg-saturated peas yield minima in cookability which are more narrow than those of the Ca-saturated peas. The Mg ions apparently hold the pectin molecules less firmly bound than the Ca ions. Mg-pectinate is, in other words, more hydrophilic. However, it seems strange that the phytinate and the phosphate ions should show their effect at lower pH in the Mg-saturated than in the Ca-saturated peas since Mg-phytinate and Mg-phosphate require higher pH for precipitation, at least in the case of pure systems (cf. fig. 6 and 7). The fact that Na-phytinate and Na-phosphate are more effective than NaCl points either to a) a precipitation effect or b) to a special effect of the polyvalent anions on the solvation of the pectin.

3. Na-phytinate causes a sharp increase in cookability as we go from pH 4.5 to 5.5 whereas Na-phosphate has its effective range between pH 6 and 7 (fig. 19, A and B). This agrees well with the titration curves for Ca in figures 6 and 7. The NaCl-systems yield an interesting series on the alkaline side (fig. 19, C). Since no Ca- and Mg-precipitants were added to these systems the cookability is here an expression of the conditions of the peas. We note that the soaked peas, with their high content of inorganic phosphates, regain cookability between pH 6 and 7. The other peas, which are all leached, show the following order of cookability:

Mg-saturated > "Leached" > Ca-saturated.

The "leached" peas are saturated with both Mg and Ca and occupy therefore an intermediate position.

#### 14. How to improve the cookability.

The problem of making hard-cooking peas cookable involves two steps:

1. Addition of the proper Ca- and Mg-precipitant.



2. Adjustment of the pH to the most effective range of precipitation.

Since peas, even the most hard-cooking, contain a certain amount of such precipitants it is only necessary to add a relatively small complement. If peas contain a total of about 15 m.e. divalent cations per 100 g, a somewhat smaller quantity of the precipitant should be sufficient, provided the pH is right.

It is customary in many parts of the world to add sodium bicarbonate to improve the cookability of peas. Boiling changes the bicarbonate to carbonate which is a Ca- and Mg-precipitant. BJÄLFVE recommends the use of  $\text{Na}_2\text{HPO}_4$ .

In order to compare the action of these compounds the experiments described in figures 20, 21 and 22 were performed.

For these experiments we used a hard-cooking sample of peas, labelled "Cooperativa", which was kindly supplied by Mr. BJÄLFVE, and a sample of Ca-saturated "Gyllen" peas. The peas were allowed to swell for 18 hours in the proportion of 165 cc solution per 100 grams of peas (= 30 cc per 100 peas). The pH was determined in the swell-water and the peas were cooked in steam in the above described cooker. The number of millimols of salt (fig. 20) and of NaOH (fig. 22) added is written at the top of the curves. The values within the parentheses give the pH.

Fig. 20 gives the cooking curves obtained with the different salts, and in fig. 21 we find the per cent cooked in 30 minutes plotted as a function of the salt concentration (fig. 21, A) and of the pH (fig. 21, B). The figure brings out the following facts:

1. In molecular proportions the  $\text{Na}_2\text{HPO}_4$  and  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  are about equally effective in the case of the untreated "Cooperativa" peas. In the Ca-saturated peas the  $\text{Na}_2\text{HPO}_4$  has an appreciably greater effect on the cookability.

2. The  $\text{NaHCO}_3$  is, on a molar basis, less effective than  $\text{Na}_2\text{CO}_3$ . But if we consider that two molecules of  $\text{NaHCO}_3$  break down, on boiling, to form one molecule of  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  we find that the bicarbonate is more effective on the equivalent basis. (Comp. effect of 5 and 10 m.mols  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  with 10 and 20 m.mols  $\text{NaHCO}_3$  respectively.) It is conceivable that the liberated  $\text{CO}_2$  gas serves to puff out and soften the peas.

3. The Ca-saturated peas require a much higher concentration of carbonate and phosphate to attain the same degree of cookability as the natural peas.

4. The peas attain a high degree of cookability at a much lower pH in the phosphate-treated than in the carbonate-treated condition. Both

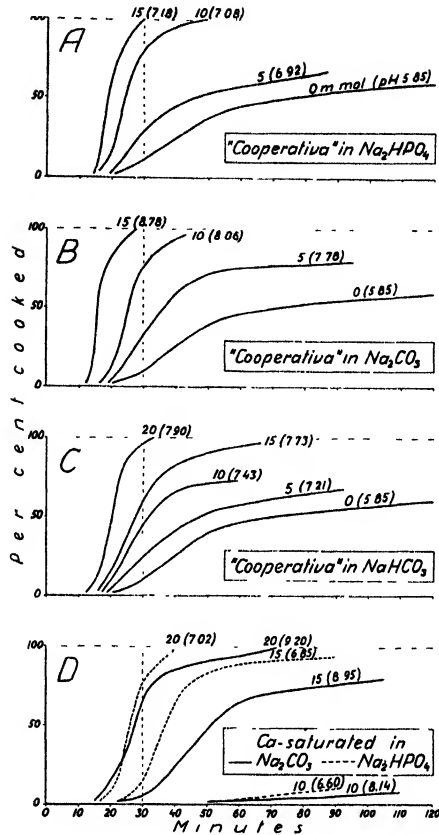


Fig. 20. Cookability of the "Cooperativa" and the Ca-saturated "Gyllen" peas after treatment with indicated number of m.mols of  $\text{Na}_2\text{HPO}_4$ ,  $\text{NaHCO}_3$  or  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  per 100 grams peas. Figures in parentheses indicate pH of the solution after the peas have been soaked in it for 18 hours.

the "Cooperativa" and the Ca-saturated peas become easily cookable within the same range of pH around the neutral point, i. e., within the Ca-precipitating range of the phosphate ion.

The pH of the carbonate-treated peas is higher in the Ca-saturated than in the "Cooperativa" due to the fact that the latter are unleached and possess therefore a greater buffer capacity. The pH of the bicarbonate-treated peas does not represent the true, final pH since it was determined in the swell-water before the decomposition of the bicarbonate.

In the experiment described in fig. 22 the peas were soaked in solu-

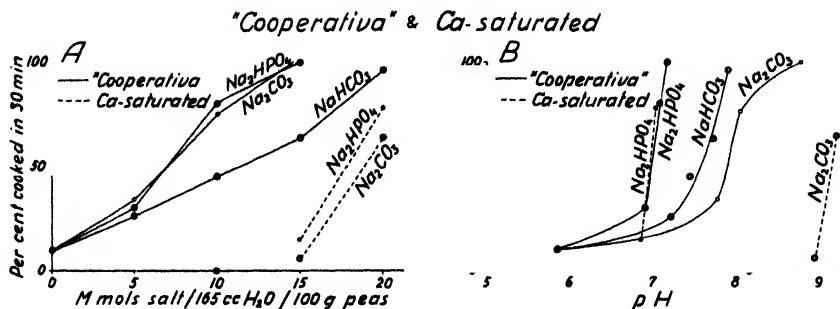


Fig. 21. Percent cooked after 30 minutes (from fig. 20) as a function of A. the salt concentration, B. the pH.

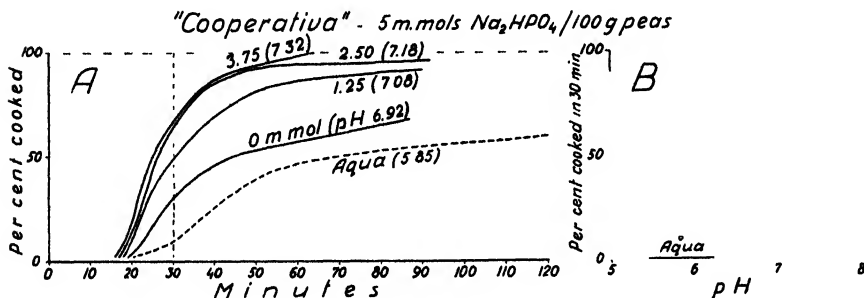


Fig. 22. A. Cookability of "Cooperativa" peas after treatment with 5 m.mols  $\text{Na}_2\text{HPO}_4$  plus 0 to 3.75 m.mols NaOH per 100 grams peas. B. Percent cooked after 30 minutes as a function of pH.

tions containing 5 m.mols  $\text{Na}_2\text{HPO}_4$  together with 0, 1.25, 2.5 and 3.75 m.e. NaOH per 100 grams of peas.

We note that the maximum effect is practically attained with 2.5 m.e. NaOH (5 m.e. had the same effect as 3.75 m.e., the highest value shown in the figure). 2.5 m.e. NaOH plus 5 m.mols  $\text{Na}_2\text{HPO}_4$  is equivalent to a mixture of  $\text{Na}_2\text{HPO}_4$  and  $\text{Na}_3\text{PO}_4$  in equal proportions. 5 m.mols of this mixture is about as effective as 10 m.mols of the dibasic phosphate (cf. fig. 20). At the rate of 2.5 m.mols of each of these salts per 100 grams of peas we would have to add 0.895 g  $\text{Na}_2\text{HPO}_4 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$  (M.wt. 358.22) and 0.950 g  $\text{Na}_3\text{PO}_4 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$  (M.wt. 380.21), or nearly 9 and 10 grams respectively per kg peas. These quantities would probably be sufficient for the most obstinate peas.

By using this mixture of di- and tribasic phosphates we avoid the introduction into the food of undesirably large amounts of buffering material, which might be antagonistic to the acid digestion in the stomach. The phosphates give us a maximum effect at pH around neu-

trality (fig. 22 B) whereas the use of carbonate or bicarbonate would make the peas alkaline.

On the other hand the addition of a little phosphate might constitute a useful complement to the diet. Ca-phytinate has been found to be unresorbable unless the phytin is split by the presence of phytase, and the ricket-producing action of certain cereals is held to be due to this fact (HARRISON and MELLANBY 1939, PEDERSEN 1940). It is apparent that phytin makes soft bones as well as soft peas whereas Ca-phosphate makes hard bones and, if the pH is not raised, hard peas as well. What we want is soft peas and hard bones. But these are not incompatible, for a little soluble phosphate added to the peas before the cooking and a little Ca salt added after the cooking would satisfy both requirements. If the pH is raised to 7 the insoluble tricalcium phosphate may even be added before the cooking without impairing the cookability.

In view of the fact that peas contain only 3 to 5 m.e. Ca (= 60 to 100 mg) per 100 grams, and considering that only a part of this Ca is resorbed, the addition of Ca would seem very desirable.

### 15. The influence of humidity.

In October 1945 we placed 400 "Torsdag II" (1945) peas in each of six desiccators, over saturated solutions of 1.  $\text{NaNO}_2$ , 2.  $\text{NH}_4\text{Cl} + \text{KNO}_3$ , 3.  $\text{NH}_4\text{Cl}$ , 4.  $\text{KBr}$ , 5.  $\text{K}_2\text{CrO}_4$  and 6.  $\text{Na}_2\text{HPO}_4 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$ . All solutions were in contact with an excess of salt. The percent humidity at  $20^\circ \text{C}$  within the closed space was 1. 66.0, 2. 72.6, 3. 79.5, 4. 84.0, 5. 88.4 and 6. 95.0. The desiccators were placed in a room where the temperature was kept at  $20^\circ \pm 0.2$ . A cooking was made after 3 months and a second cooking after 6 months when, in addition, the moisture content was determined. The results are shown in fig. 23.

We note that there is a decided decrease in cookability with an increase in per cent humidity of the air and in moisture content of the peas.

The peas which were kept at 95 % humidity got moldy.

After one year another cooking will be made and the phytin content will be determined. The results will be reported later,

### 16. The influence of fertilizers.

In 1944 "Torsdag II" peas were grown on a sandy soil in glazed terra cotta cylinders arranged in two triangles, an "anion" and a "cation" triangle, each with 10 cylinders, and in a row of 5 cylinders

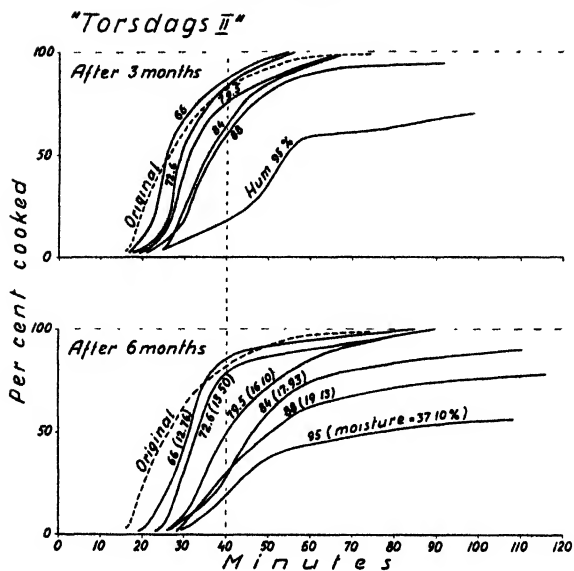


Fig. 23. Cookability of "Torsdag II" peas after being kept 3 and 6 months in air at indicated percentage humidity. The figures in parentheses on the lower curves give the moisture content at the end of 6 months.

receiving special applications. These cylinder experiments have been described by MATTSON and ANDERSON (1946) and need not be explained here.

Despite the one-sided application of the ions K, Ca, Mg,  $\text{NO}_3$ ,  $\text{PO}_4$  and  $\text{SO}_4$  the experiment yielded no really hard-cooking peas, due, it is believed, to the fact that the soil was too rich in phosphate. For this reason we shall here mention only some of the most noteworthy facts:

The K + Ca + Mg + sulfate-peas were the hardest-cooking.

All phosphate-peas were very soft-cooking.

The  $\text{NH}_4$  + phosphate-peas gave, by far, the greatest yield.

The alkali-peas, given a heavy application of Na- and K-salts, including phosphate, were the softest-cooking peas we have found anywhere (100 % cooked in 20 minutes) but they were small in size.

Besides these experiments on a soil, the peas were also grown in cylinders containing a clean, carbonate-free sand from Runhällen in Västmanland. We shall here give the results obtained from three of these cylinders, the K-, Mg-, and Ca-cylinder.

The cylinders (30 plants in each) were each watered with 10 liters of a solution containing 50 m.mols of each of the following salts:  $\text{KNO}_3$ ,  $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$ ,  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  and  $\text{MgSO}_4$ ; and 0.1 m.mol of each of the following:  $\text{FeCl}_3$ ,  $\text{CuSO}_4$ ,  $\text{ZnSO}_4$  and  $\text{H}_3\text{BO}_3$ .

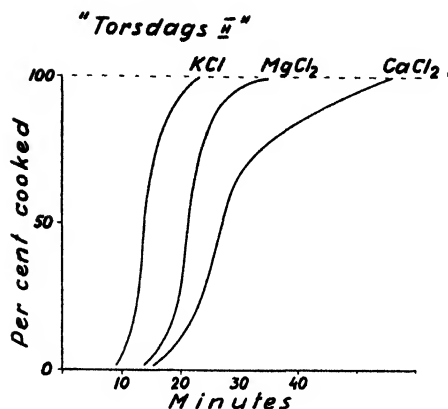


Fig. 24. Cookability of "Torsdag II" peas grown on sand and fertilized with complete fertilizer plus a five-fold application of either K, Mg or Ca in the form of chloride.

In addition to this, 250 m.mols of KCl, MgCl<sub>2</sub> and CaCl<sub>2</sub> were added to the solutions for the K-, Mg- and Ca-cylinder respectively.

Each cylinder thus received an extra, five-fold amount of the respective cation in the form of chloride.

The yield was poor and some of the peas were worm-eaten.

The cooking, after soaking in water for 18 hours, yielded a perfect series of curves (fig. 24) which place the ions in the familiar order

$$K > Mg > Ca,$$

which thus strikingly confirms the influence of the nature and valence of cations.

Table 7 gives the composition of the peas with respect to the cations and total phosphoric acid. A more detailed analysis could not be made as a result of the poor yield.

Table 7.

The composition of "Torsdag II" peas grown on sand and given complete fertilizer plus a five-fold amount of either K, Mg or Ca in the form of chloride (cf. fig. 24). Total ash-content of K, Mg, Ca and P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>.

Extra fertilizer	M.c./100 g			Mg/100 g P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>
	Ca	Mg	K	
KCl.....	3.4	13.4	52.4	1289
MgCl <sub>2</sub> .....	4.0	19.5	37.2	1412
CaCl <sub>2</sub> .....	10.7	13.2	40.3	1337

We note that the peas contain a greatly increased amount of the cation supplied in excess.

The total  $P_2O_5$  is high in all of the samples. This is undoubtedly responsible for the fact that even the Ca- and Mg-peas were relatively soft-cooking. The experiment is now being repeated with a whole series from a low minimum to a high maximum in phosphate concentration.

The fact that the peas from our cylinder experiments were all relatively soft-cooking despite the extremes in fertilizer treatments leads us to believe that there are other factors than fertilizer on which cookability depends. The cylinders stand in a sandy soil on a high, warm place along the sunny side of a wooded ridge. The peas were grown climbing, on sticks. The ripening was therefore rapid and complete.

We are now studying the influence of the various climatic factors on the composition, the phytin production and the phytase activity of peas.

The author wishes to thank Mrs. E. ANDERSON, Mr. H. BERGER, Mr. C. G. ODENGRIM and Mr. K. WAHTRAS for their assistance in this work.

Financial support has been received from the Royal Swedish Academy of Agriculture which is here gratefully acknowledged.

## 17. Summary.

Peas possess the property of cation exchange and their cookability depends on the nature and valence of the cations in combination with the pea acidoids. When saturated with monovalent cations, including H ions, peas are very soft-cooking, but Ca- and Mg-saturated peas are uncookable. The addition of Ca- and Mg-precipitants such as oxalate, phosphate and carbonate ions improves the cookability.

The phytin (inositol phosphoric acid) content has been found to be higher in soft- than in hard-cooking peas. Phytin is a Ca- and Mg-precipitant. Its precipitating power is greatly increased at boiling temperature, i. e., its precipitation threshold lies at a lower pH in a hot than in a cold solution.

If peas are soaked in water for 8 days they become uncookable because phytin is split by the action of phytase and the inorganic phosphates thus formed do not precipitate Ca and Mg at the pH of the peas.

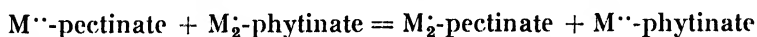
If peas are allowed to swell in water a few hours and then heated to kill the phytase the prolonged soaking will have no effect on the cookability. If phytase is added the peas will become uncookable.

If peas are leached for several days in a large volume of water they become uncookable whether the phytase is killed or not. The phytin, which exists partly in combination with monovalent cations, is partly soluble in cold water and this solubility is assumed to be increased by an exchange of cations with the pea acidoids which, on dilution, bind relatively more divalent cations (as a result of the valence effect on the Donnan equilibrium).

If we plot the cookability (percent peas cooked in a given time) as a function of pH we get a U-shaped curve which shows a minimum in cookability between pH 4 and 5. This corresponds to the precipitation threshold of Ca- and Mg-phytinate. Within this range of pH the phytin does not precipitate a sufficient amount of Ca and Mg, and the exchangeable Ca and Mg ions in the pea acidoids are not sufficiently displaced by H ions to permit a solvation of the colloids. At higher pH Ca and Mg are precipitated as phytinates. At lower pH Ca and Mg pass into solution as a result of a displacement by H ions.

The acidoids which in the Ca- and Mg-saturated condition are responsible for the failure of peas to cook are the pectins of the middle lamella which bind the cells together. When the peas cook this pectin dissolves and the unruptured cells fall apart. By measuring the viscosity of solutions obtained by heating Ca-saturated citrus albedo (white portion of the rind, which is rich in pectin) in the presence of Na-phytinate and plotting the viscosity as a function of pH a U-shaped curve was obtained whose minimum corresponds to the minimum in cookability of the peas. At the minimum in cookability there is a maximum in Ca- and Mg-pectinate.

The cookability of peas depends on the reaction:



The conclusions here made are supported by studies of the properties of phytin, pectin and legumin.

A cooker is described which yields continuous cooking curves. A great number of such curves are presented, showing the influence of pH on the action of various sodium salts, including phytinate and phosphate.

A mixture of di- and tri-basic sodium phosphate is recommended as the most efficient phosphate addition to hard-cooking peas.

The influence of fertilizers is discussed. Excessive applications of K, Mg and Ca yielded cookabilities in the order





## References.

- ADLER, L. 1916. Gewinnung von Phytase aus Malz. *Biochem. Z.* 75, 319--320.
- BAKER, G. L. & GOODWIN, M. W. 1941. Fruit Jellies. XI. The role of pectin. 7. Demethylation of pectin and its effect upon jellying properties. *Delaware Agr. Exp. Sta. Bul.* 234.
- BECKER-DILLINGEN, J. 1929. *Handbuch des Hülsenfruchterbaues und Futterbaues.* Berlin.
- BJÄLFVE, G. 1944. Ärternas kokbarhet och fosfathalt. *Lantmannen* 28, 44—46, 68—69.
- BONNER, J. 1936. The chemistry and physiology of pectins. *Bot. Rev.* 2, 475—497.
- BOUTWELL, P. W. 1917. The phytic acid of the wheat kernel and some of its salts. *J. amer. chem. Soc.* 39, 491—503.
- DICKSON, A. D., OTTERSON, H. & LINK, K. P. 1930. A method for the determination of uronic acids. *J. amer. chem. Soc.* 52, 775—779.
- FRUWIRTH, C. 1918. *Lantwirtschaftlich wichtige Hülsenfruchte.* Berlin.
- GELIN, O. E. V. & SCHWANBOM, N. 1943. Om kokegenskapen hos ärter och dess natur. *Agri Hortique Genetica*, 2, 75—96.
- 1944. Ärternas kokbarhet, äldre och nyare rön. *Lantmannen* 28, 209—210.
- HALASZ, P. 1918. Gesamtposphorsäure und Lecithinphosphorsäuregehalt verschiedener Erbsensorten. *Biochem. Z.* 87, 104—106.
- HARRIS, R. S. & MOSHER, L. M. 1934. Estimation of phytin phosphorous. *Ind. Eng. Chem. Anal. Ed.* 6, 320—321.
- HARRISON, D. C. & MELLANBY, E. 1939. Phytic acid and the ricket-producing action of cereals. *Biochem. J.* 33: 2, 1660.
- HOUWELINGEN, P. VAN. 1903. Over het nietkoken der erwten. *Landbauw-kundig T.* 11, 436—438.
- MATTSON, S. 1931. The laws of soil colloidal behavior: III. Isoelectric precipitates. *Soil. Sci.* 30, 459—495.
- 1928. Cataphoresis and the electrical neutralization of colloidal material. *J. phys. Chem.* 32, 1532—1552.
- 1933. Cataphoresis. An improved cylindrical cell. *J. phys. Chem.* 37, 223—227.
- 1942. Laws of ionic exchange. *Lantbrukshögsk. Annal.* 10, 56—73.
- 1945. Laws of ionic exchange. II. The valence effect in relation to the micellar ion concentration and base saturation of Donnan systems. *Lantbrukshögsk. Annal.* 12, 222—229.
- MATTSON, S. & ANDERSSON, E. 1945. The acid-base condition in vegetation, litter and humus. VIII. Forms of acidity. *Lantbrukshögsk. Annal.* 12, 70—100.
- 1946. The acid-base condition in vegetation, litter and humus: Forms of bases. *Lantbrukshögsk. Annal.* 13 (in press).
- MELLANBY, E. 1925. Experimental rickets. The effect of cereals and their interaction with other factors of diet and environment in producing rickets. *Med. Res. Counc. Spec. Rep. Ser.* 93. London.

- MYERS, P. B. & BAKER, G. L. 1934. Fruit Jellies VIII. The role of pectin. 4. The physico-chemical properties of pectin. Delaware Agr. Exp. Sta. Bul. No 187.
- PEDERSEN, J. G. A. 1940. Experimentel rakitis hos svin. Betydningen af foderets indhold af fytin og fytase. (English summary.) 193de Beretning fra Forsøgslaboratoriet. Khvn.
- PRIANISCHNIKOW, D. N. 1930. Spezieller Pflanzenbau. Berlin.
- RITTHAUSEN, H. 1872. Die Eiweisskörper der Getreidearten. Hülsefrüchte und Ölsamen. Bonn.
- SCHEEL, K. C. 1936. Die colorimetrische Bestimmung der Phosphorsaure in Düngemitteln mit dem Pulfrich-Photometer. Z. anal. Chemie. 195, 256—269.
- SOSNIN, A. V. 1927. Die Untersuchung der Kochfähigkeit der Erbsensorten. *Annals Inst. Exp. Agron.* 5, 362—380. (From photographic copy of a part of the paper. Original paper [Russian] not available.)
- TORSSELL, R. 1941. Kokning av ärter. Svenska Spannmålsbolaget. Sthlm.
- 1942. Kvaliteten hos kokärter av 1940 och 1941 års skörd samt hos bruna bönor hos 1941 års skörd. Sveriges Utsädesför. T. 52, 419—432.
- 1943. Kvaliteten hos kokärter av 1942 års skörd. Sveriges Utsädesfören. T. 53, 186—193.
- WILSON, C. P. 1925. The manufacture of pectin. *Ind. Eng. Chem.* 17, 1065 - 1067.



# Some Electron-Microscopic Investigations of the Fine Structure of the Flax Fibre.

By BIRGER ERIKSSON and SIGURD SÄVERBORN

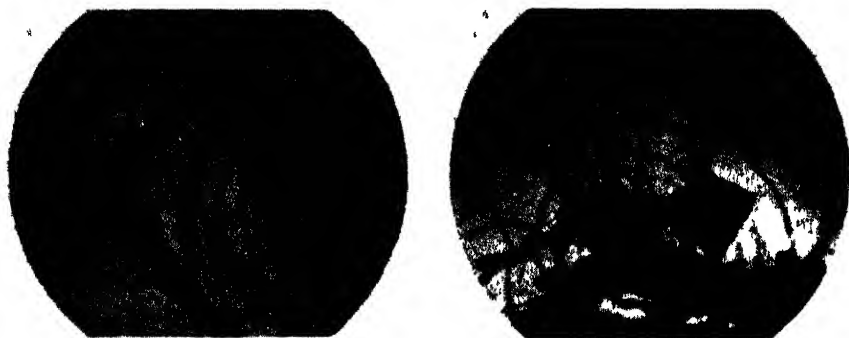
Light-microscopic and X-ray methods have chiefly been employed in the study of the fine structure of different fibrous materials. By means of the light-microscope, it has been proved in different ways that the cell wall of the native fibre generally consists of two layers, namely an outer thinner one, called the primary layer, and an inner thicker one, called the secondary layer. The secondary layer, which chiefly consists of pure cellulose, is built up of concentric lamellae, which, for their part, are composed of more or less spiral fibrils. The direction of these fibrils often changes from one lamella to another. The thickness of the fibrils of the cotton-fibre was found by measurement with the ultra-violet microscope to be  $0.2\ \mu$ , WERGIN (1939). Treatment with acids or swelling can, according to several workers, bring about a decomposition of these fibrils into short pieces, so-called dermatozomes. After swelling with dilute cuoxam, WERGIN (1940) measured the length of the dermatozomes as  $0.20\text{--}0.25\ \mu$ . Thorough investigations by Dolmetsch and co-workers, DOLMETSCH (1940 a, b), proved that the same decomposition took place after treatment with strong phosphoric acid. These workers affirm that, apart from the lamellae and fibrils, there is a transverse striated structure in the cell walls of different fibres. Lüdtke and Hess, HESS (1934), KERR (1937) and other workers, are of opinion that the dermatozomes are joined together to fibrils by a cement of pectin character. This pectin substance covers both the dermatozomes and the fibrils and the lamellae. By different kinds of chemical treatment, the cement can be weakened or dissolved and the different elements thus freed. However, according to other workers, e. g. FREY-WYSSLING (1936), the dermatozomes consist of crystalline micelles, which are freed by an advanced decompo-

sition of the cellulose in the amorphous regions between them. Studying young cotton fibres, FARR (1937, 1941) showed the existence of microscopic cellulose particles in living cytoplasm. He supposed a linear apposition of these particles, whereby fibrils were constituted during the formation of the fibre-wall. These cellulose particles, however, are larger ( $1.1 \mu \times 1.5 \mu$ ) than the dermatozomes freed from the fully developed fibre-wall.

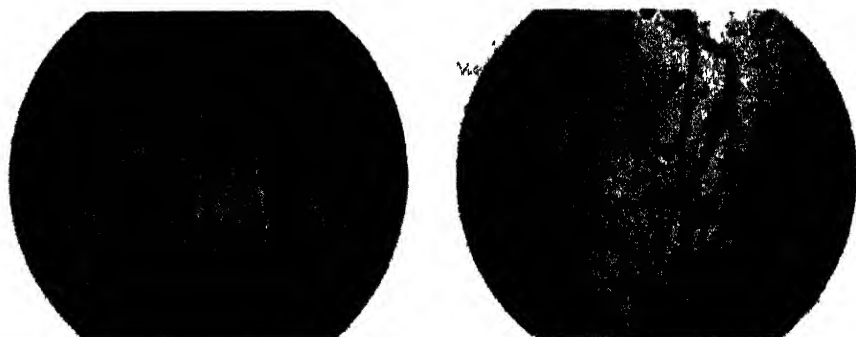
X-ray investigations proved that the cellulose molecules were arranged in a crystal lattice, and that the size of the unit cell was  $8.35 \times 10.3 \times 7.9 \text{ \AA}$ , whereas, for the crystalline region or the micelle, the breadth was found to be about  $60 \text{ \AA}$  and the length at least  $600 \text{ \AA}$ . According to the Naegeli hypothesis, these micelles are built together brick-wise to form a larger system, while, according to the more recent "fringe theory", FREY-WYSSLING (1936), KRATKY (1935, 1938), the single molecules are longer than the micelles, extending through several of the latter over the amorphous fringe areas situated between them. This theory was confirmed by the fact that the molecules, at least in native cellulose, were found to be considerably longer than the micelles.

In the electron microscope, we now dispose over a direct, visual means of learning the morphology of the fibre, which has formerly been unexplorable even by the best light-microscope or by means of X-rays. It may be said, indeed, that the interval between the ranges accessible to light-microscopic or X-ray investigation has already been bridged in some degree. The most serious obstacles to the employment of this method were removed by the use of sufficiently thin preparations. Several different methods were tried, but most of them proved unsatisfactory. RUSKA (1940) prepared microtome-sections of only  $0.1 \mu$ , but these were still too thick. Owing to the great absorbing power of the thick preparation, a very distinct hollow structure appeared on powerful electron-irradiation in the microscope, which made Ruska suppose that the fibre had such a structure from the beginning. Later, however, MAHL (1940) and FRANZ, WALLNER and SCHIEBOLD (1941) showed that hollows gradually come about in thick fibre preparations in the electron beam, and that, generally speaking, the fibre is seriously deformed and even vaporized if the preparation is too thick and the irradiation is too long and intense.

Another method of preparation tried consists in dry grinding of the fibres with balls in the so-called "Schwingmühle". HESS, KIESSIG and GUNDERMANN (1941) showed that the coarser fibrils, which are also visible under the light-microscope, when irradiated in the electron



*Figs. 1 and 2.* Fibrils from flax fibres. The fibre was preliminarily treated by boiling in 1 % alkali solution for one hour, and was then shaken in a glass tube together with glass balls and water for 5 hours.



*Figs. 3 and 4.* Fibrils from flax fibres preliminarily treated as in the previous case, but shaken for 9 hours.

microscope sometimes appeared to be divided, like brushes, into finer fibrils, so-called primary fibrils, the diameter of which varied between 100 and 750 Å. Subsequent attempts of HUSEMANN and CARNAP (1943 a) to reproduce this effect failed, only more or less irregular fibre fragments being obtained.

Another method, which has been applied more successfully, consists in a thorough wet grinding of the fibrous material. After grinding in the "Schwingmühle", HUSEMANN and CARNAP (1943) obtained in this manner very beautiful pictures of various fibres. The fibres were split by grinding into "primary fibrils", which, particularly in native fibres, were very long and fine. Their least diameter was reported to be 50–60 Å. The synthetic cellulose fibres, on the other hand, showed a somewhat coarser network, but their fibrous structure was also very striking.

In wet grinding, the fibres are no doubt subjected to smaller mechanical strains than in dry grinding, largely owing to the fact that the swelling action of water promotes the longitudinal defibration of the fibres, while the tearing of the fibres and fibrils is prevented.

For grinding in the "Schwingmühle", rather large balls are used. Since still milder conditions might be expected from the employment of smaller balls, we attempted to procure defibration by shaking a few fibres together with glass balls and water in a glass tube. No attempt was made to ascertain the degradation of cellulose entailed by grinding, since the quantity of fibres ground was extremely small and the degree of polymerization found for the whole quantity of fibres ground would hardly correspond to that of the cellulose in the primary fibrils most exposed and observed in the electron microscope. The degree of grinding is not the same for the whole material, since a part of the fibres after grinding still form rather large lumps in which the cellulose is certainly more highly polymerized than in the fibrils rendered visible. As a special preparatory treatment of the fibre was involved, the degree of polymerization of the cellulose was determined before grinding. As regards the influence of grinding upon the degree of polymerization, STAUDINGER and DREHER (1936) showed that wet grinding was milder than dry grinding, and that the degradation velocity rapidly decreased during continued wet grinding and ceased almost completely at a degree of polymerization of about 500.

It was first attempted to grind flax fibres by the above-described shaking method. The fibres had previously been freed from fats and waxes by an ether-alcohol extraction, after which they were boiled for an hour in a 1 % alkali solution in order to dissolve some hemi-cellulose material. In the electron microscope, we found a very advanced division of the fibre into primary fibrils both after 5 hours' (Figs. 1 and 2. Magnification in these and all other pictures: 20000:1) and after 9 hours' (Figs. 3 and 4) shaking. 9 hours' shaking seemed to give more complete defibration, for which reason subsequent samples were usually treated for this period.

The fibrils obtained are very reminiscent of those obtained by HUSEMANN and CARNAP (1943). There is no division into predominantly equally thick primary fibrils, but all degrees of thickness are represented. Division into finer and finer fibrils has obviously proceeded successively. The diameter of the finest fibrils is about 50–60 Å, which is at the limit of resolution of the electron microscope. It is hard to state with certainty whether division has proceeded still farther; it is, however, probable that defibration has stopped at the finest



*Figs. 5 and 6.* Flax fibres preliminarily treated only by the extraction of fat and wax and shaken for 9 hours.

visible fibrils. If the fibrils were divided to any further extent, they would surely show less contrasts, and the areas situated between them would not appear so empty, but exhibit darker, contourless parts caused by accumulated fibrils, in themselves invisible. The fibrils may be quite long; some could be followed through 1–2 visual fields in the microscope, i. e. through several tens of  $\mu$ . The fibrils are thus essentially longer than the cellulose molecule, and the cellulose is obviously, in accordance with the “fringe theory”, built up of parallel, longitudinally displaced molecules.

The diameter of the finest fibrils corresponds with that of the crystalline micelles found by the X-ray method (p. 234). It might be conceived that the limit of division was set by such crystalline, less easily decomposed micelles joined by the amorphous regions situated between them to primary fibrils, which, lying parallel to each other, form the coarser fibrils. HESS, KIESSIG and GUNDERMANN (1941) have shown, however, that the crystalline order in the cellulose fibre soon disappears when the latter is submitted to dry grinding. It is probable that this order is also at least disturbed by wet grinding of the fibre, although the above authors demonstrated that a fibre, having lost its crystalline character in dry grinding, recrystallized to a certain extent on contact with water. However, the X-ray diagram of the native fibre does not recur in such cases, but hydrated cellulose is formed.

As shown by the different pictures, even the finest fibrils seem to be perfectly homogeneous in the longitudinal direction. No hint can be obtained as to the nature of the cleavage planes of the dermatozomes mentioned on p. 234, and we therefore suppose that these dermatozomes are formed by an extensive degradation of the cellulose in the amorph-



ous regions, where the fibrils are weakened and break. Not the slightest trace of the double-walled "Fremdhautsystem", supposed by LÜDTKE, KERR (1937) and others could be detected.

WERGIN (1942), however, claims to have shown the existence of cleavage planes across the fibrils. His fibres were dry when ground, and the pictures obtained were so vague and undefined that it may be doubted whether this interpretation is correct. In the same paper, Wergin suggests that each fibril is surrounded by a cortex, which, like a sausage-skin, prevents the enclosed, ground mass from flowing out. The interpretation of the pictures, however, seems to be quite arbitrary in this case also.

Figs. 5 and 6 represent fibrils obtained from flax fibres which have been ground in the ordinary way, i. e. by shaking together with glass balls in water. In this case, the fibres were cleaned before grinding only by the extraction of fat and wax, without the treatment with alkali employed in the previous cases. Defibrillation now seems not to have proceeded so readily and completely as before, and the exposed fibrils appear to be less porous and therefore to show more contrasts in the figures. The explanation certainly lies in the fact that the fibre boiled in alkali and thereupon washed but not dried had swelled to such an extent that the degree of swelling during the subsequent grinding in water was greater than that of the fibre not treated with alkali. HUSEMANN and CARNAP (1943) pretreated cell-wool, in one case by boiling in water, in another by mercerizing in 18 % alkali, by which means they also found that defibrillation, particularly that of the mercerized sample, yielded fibrils poorer in contrasts than those obtained by the grinding of untreated material.

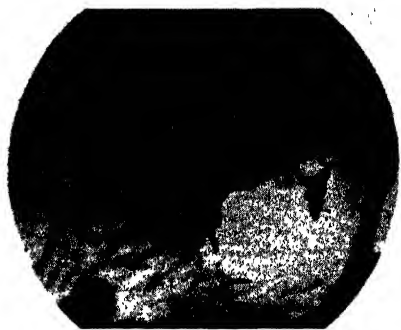
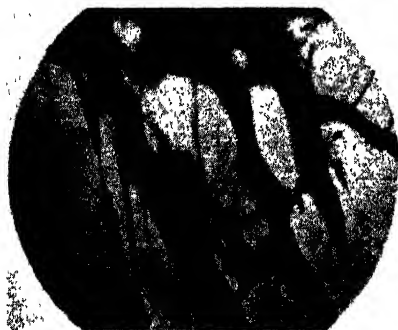
By way of further inquiry into the influence of alkali treatment on the defibrillation of flax fibres, the latter were submitted to the following preparatory treatments before shaking:

- (1) Boiling for 6 hours in 7 % alkali solution (Figs. 7 and 8);
- (2) Keeping in 18 % alkali solution for 4 hours at 2° C. (Fig. 9);
- (3) Keeping in 30 % alkali solution for 4 hours at 2° C. (Fig. 10).

On comparison with the pictures obtained from the samples previously treated with 1 % alkali solution (Figs. 1-4), treatment with the 7 % and 18 % alkali solutions seems not to have brought about any essential change in the appearance of the fibrils, whereas treatment with the 30 % solution seems in certain cases to have resulted in a weakening of the fibrils, since, as shown in Fig. 10, some of the latter have been torn by grinding. By measurement of the viscosity of the nitrated cellulose, it was found that the degree of polymerization of cellulose



*Figs. 7 and 8.* Fibres preliminarily treated by boiling in 7 % alkali solution for 6 hours before shaking.

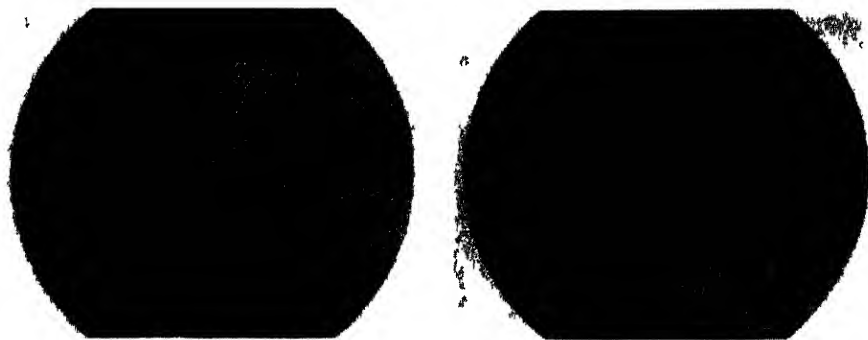


*Fig. 9.* Flax fibre treated with 18 % alkali solution for 4 hours at 2° C. before shaking.

*Fig. 10.* Flax fibre treated with 30 % alkali solution for 4 hours at 2° C. before shaking.

had decreased from about 3000 to about 2000 in case (2), and to about 1500 in case (3). It might be supposed that the decrease in the degree of polymerization in case (3) was the reason for the weakening of the fibrils, but subsequent experiments with hydro- and oxycellulose showed that this could hardly be the case, since the degree of polymerization of the latter had to be brought considerably lower before the cellulose was so weakened that the fibrils broke during grinding. In this case both swelling and cellulose degradation must probably be regarded as factors contributing to the rupture of the fibrils.

Since it is obvious that swelling is advantageous during grinding, it might be suggested that division into primary fibrils would not come about if the fibres were shaken in a liquid that did not have a swelling action on the cellulose. In order to investigate whether this was really the case, flax fibres were shaken in carbon tetrachloride, whereupon a

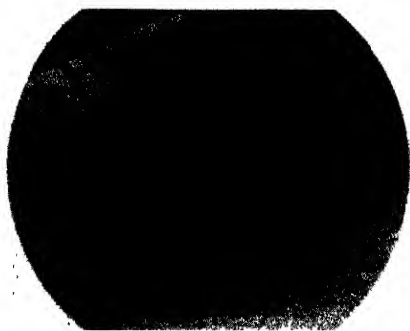


*Figs. 11 and 12.* Flax pectin shaken in a glass tube together with glass balls and water for 9 hours.

drop of the suspension was dried in the ordinary way on the diaphragm of nitrocellulose. (Carbon tetrachloride was chosen, since it does not dissolve nitrocellulose.) No division into fibrils could be found under the microscope; the cellulose had instead been torn into large, irregular fragments. The necessity of swelling during grinding is also evidenced by the more or less vain attempts (p. 3) of several workers to defibrate the material by dry grinding.

We also tried to grind nitrated flax cellulose in water, but all attempts failed, only rather coarse, irregular cleavage products being observed. Nitrocellulose does not swell in water, which must be regarded as the cause of failure in this case also. In another connection, however, it was attempted to grind nitropectin in water, as a result of which a very advanced division of the material into fine fibrils could be observed in the electron microscope (Figs. 11 and 12). However, the fibrils obtained were usually not as long as those from flax cellulose, and often formed networks. The reason why this nitrated product, in opposition to nitrocellulose, can be divided into fibrils by grinding in water, is probably constituted by the fact that nitropectin, which contains hydrophilic carboxyl groups, swells in water to a certain extent. We failed, however, to defibrate nitropectin in carbon tetrachloride; the reason was again obviously insufficient swelling.

HUSEMANN and CARNAP (1943 b) showed that strongly hydrolysed cellulosa fibres of different origins (degree of polymerization about 100) fell into very small pieces when merely subjected to pressure between two glass plates. Under the electron microscope, these pieces appear as spool-shaped bodies with a minimum breadth of about 100 Å and

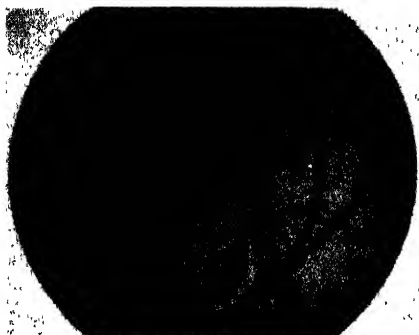


*Fig. 13.* Flax fibre purified by chlorination before shaking.

a length varying between 0.5 and 1  $\mu$ . It might be conceived that these were the primary elements of the fibre, constituting the crystallites freed from their amorphous sheaths.

As it might be of interest to study the grinding-products of less degraded celluloses in the electron microscope, some photographs of hydro- and oxycelluloses of different degrees of polymerization were taken. The fibres were ground in the usual way, by shaking together with glass balls and water in test-tubes. The degrees of polymerization were found by nitration and subsequent viscosity measurements in acetone. As raw material, we used flax fibres purified by chlorination and subsequent removal of the chlorinated products with sodium sulphite solution. Measurements of viscosity have shown that this purification, which removes all non-cellulose material, does not entail any essential decomposition of the cellulose. After grinding, the usual division into primary fibrils (Fig. 13) was observed in the electron microscope.

By boiling with N sulphuric acid for 1/2 hour, 1 hour and 3 hours, three hydrocelluloses, with degrees of polymerization of about 950, 550 and 350, were prepared. These samples were ground in the usual way by shaking, and examined in the electron microscope. It was found that the most highly polymerized cellulose (Fig. 14) exhibited almost the same appearance as cellulose from untreated fibres, whereas cellulose of the degree of polymerization 550 (Fig. 15) was torn into fragments in a few cases, but was otherwise divided into fibrils as usual. The most strongly degraded cellulose, however, was torn very seriously, usually only rather coarse, frayed ends of fibres being observed (Fig. 16). (In one case, however, a figure was obtained showing very advanced division into extremely fine fibrils (Fig. 17). The reason



*Fig. 14.* Hydrocellulose from flax fibre.  
Degree of polymerization about 950.



*Fig. 15.* Hydrocellulose from flax fibre.  
Degree of polymerization about 550.



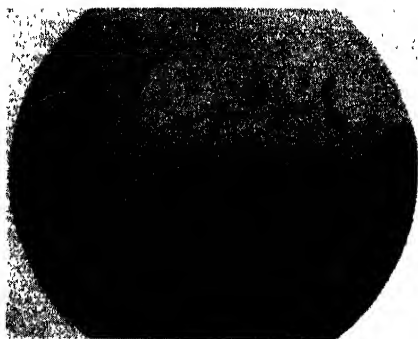
*Fig. 16.* Hydrocellulose from flax fibre.  
Degree of polymerization about 350.



*Fig. 17.* Hydrocellulose from flax fibre.  
Degree of polymerization about 350.

is not clear, but it is probable that this part of the sample was not mechanically affected during grinding. The figure shows very clearly the fibrous structure.)

In another case, the purified flax fibre was boiled for 6 hours in N sulphuric acid, and the degree of polymerization of the nitrated product was measured as about 280. After the usual grinding, the hydrocellulose was examined in the electron microscope. The pictures thus obtained (Figs. 18 and 19) differed essentially from the preceding ones. The fibre had been weakened and, as before, the fibrils had been torn off to a very great extent during grinding. Moreover, the figures showed a great number of smaller, spindle-shaped bodies, which were generally not quite free, but formed a characteristic acute-angled network. As already mentioned (p. 240), Husemann and Carnap obtained quite similar pictures from strongly hydrolysed cellulose.



*Fig. 18.* Hydrocellulose from flax fibre.  
Degree of polymerization about 280.

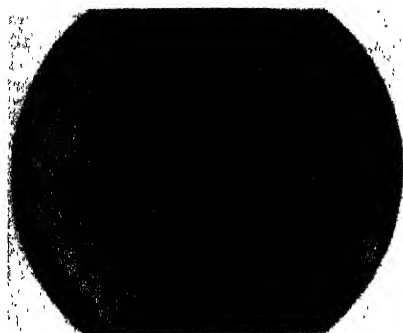


*Fig. 19.* Hydrocellulose from flax fibre.  
Degree of polymerization about 280.

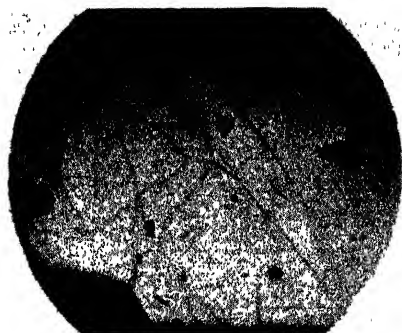
The explanation given earlier, viz. that these spindle-shaped bodies are, as it were, naked micelles, is hard to accept, since the pictures of somewhat less degraded cellulose do not exhibit the slightest trace of such bodies, but give the impression that grinding results in progressively smaller, and finally invisible, component fibrils. The spindle-shaped bodies are considerably thicker than the finest primary fibrils or the fringes that protrude from the ends of the coarser torn-off fibrils. As an explanation of the occurrence of the spindles, it may be suggested that very highly degraded cellulose has been defibrated to an extreme extent, whereupon the small particles associate to form the spindles. As shown by HAMBRAEUS and RÅNBY (1945), particles of about the same size and appearance are formed during the precipitation of nitrocellulose in water. It is possible that the precipitation is subject to the same kinetic relationships in the case of the association of unnitrated cellulose.

In the preparation of oxycellulose, the fibres purified by chlorination were kept overnight in oxalic acid containing varying quantities of potassium dichromate. The fibres were then thoroughly washed with water, and the degree of polymerization was determined by the usual viscosimetric procedure. Three products with the degrees of polymerization 1550, 1180 and 1050 were thus obtained. After grinding, they all showed the usual division into fibrils under the electron microscope (Figs. 20, 21 and 22).

In order to break the oxidatively attacked linkages in the molecular chain, the three oxycellulose samples were boiled for one hour in a 1 % alkali solution. Viscosity measurements showed that the respective degrees of polymerization had decreased to 600, 500 and 450.



*Fig. 20.* Oxycellulose from flax fibre.  
Degree of polymerization about 1550.



*Fig. 21.* Oxycellulose from flax fibre.  
Degree of polymerization about 1180.

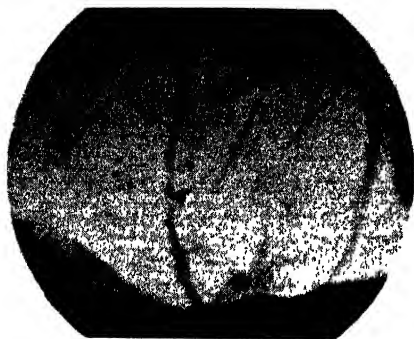


*Fig. 22.* Oxycellulose from flax fibre.  
Degree of polymerization about 1050.

After the usual grinding, all three samples showed some torn-off fibrils under the electron microscope. However, such fibrils very seldom occurred in the most highmolecular sample, whereas they were plentiful in the most low-molecular material (Figs. 23, 24 and 25).

It results from the above investigations of hydrolytically and oxidatively degraded cellulose that cellulose is not weakened sufficiently to permit the tearing off of fibres during grinding unless the degree of polymerization has considerably decreased. A degree of polymerization of 400–500 may be regarded as an approximate limiting value in this respect. This limit, however, is very diffuse, which lies in the very nature of the matter, as weakening is necessarily continuous as the degradation proceeds.

These results may be compared with the observation of STAUDINGER and SORKIN (1937) that hydrocellulose from cotton fibres only decreases



*Fig. 23.* Oxycellulose from flax fibre.  
Degree of polymerization about 600.



*Fig. 24.* Oxycellulose from flax fibre.  
Degree of polymerization about 500.



*Fig. 25.* Oxycellulose from flax fibre.  
Degree of polymerization about 450.

appreciably in strength when the degree of polymerization has sunk to below 800, whereas the fibre entirely loses its durability and rather acquires the consistency of a powder when the degree of polymerization has decreased to 200–250.

### Summary.

The fine structure of cellulose fibres, especially cotton fibres, has been investigated by many workers with the aid of light-microscopical and X-ray technique. It has proved that the fibre wall consists of 1) an outer, thinner layer, the so-called primary layer, and 2) an inner, thicker secondary layer of pure cellulose, composed of spiral fibrils, of about  $0.2 \mu$  thickness, grouped together in lamellae. Certain experiments in swelling have shown that the fibres, in their turn, are divided



into shorter pieces, so-called dermatozomes of about  $0.20\text{--}0.25\ \mu$  in length.

The X-ray experiments have established the crystal-lattice structure of cellulose, but have also shown the occurrence of amorphous regions lying between the crystalline parts.

The electron microscope provides the possibility of gaining purely visual information regarding the conditions in the regions intermediate in size between those capable of investigation by light-microscopical and X-ray methods. Great difficulties are, however, encountered in the preparation of specimens suitable for the electron microscope. As a method of preparation for fibrous materials, successful use has been made of wet-grinding in a ball-mill of agate, the so-called "Schwingmühle", but as such an apparatus was not available, and a milder defibration procedure was to be desired, the fibrous material was shaken with glass balls and water in a small glass tube.

The photographs thus obtained in the electron microscope showed a very far-reaching division of the fibrils into extremely thin, parallel, elementary fibrils with a thickness of  $50\text{--}60\ \text{\AA}$ . In no case were there indications of fission surfaces between the dermatozones.

Fibre treated with alkali is more readily defibrated than untreated material apparently owing to increased swelling in the former case. When the material was shaken in carbon tetrachloride, which has no affinity for cellulose, no division into long elementary fibrils was obtained. Nor did nitrated fibre shaken with water show such a division, while nitropectin, being a colloidal electrolyte, swelled somewhat in water and was split into elementary fibrils on shaking.

For the purpose of degrading the cellulose, in different degrees, it was treated with various solutions of acids and oxidizing agents. The degree of polymerization was determined before grinding by nitration and subsequent viscosity measurements. The electron microscope showed that the elementary fibrils were not so weakened as to be split in the grinding before the degree of polymerization had sunk to  $300\text{--}400$ . With hydrocellulose of degree of polymerization  $280$ , a division was obtained into small spindle-shaped bodies, which were conceivably "association products" of very extensively ground fibres.

\*

The work described in this paper is one of a series of investigations carried out at the request of the Flax Treatment Committee of the State Flax Board. They were performed at the Institute of Biochemistry, Royal Technical University, Stockholm, except the work here described, which was carried out at the Institute of Physical Chemistry, University of Upsala. The expenses were defrayed by funds by the State Council for Technical Research.

## Literature.

- DOLMETSCH, H. 1944. Über den Feinbau der Holzfaser. *Kolloid.-Z.* 108, 183–192.
- DOLMETSCH, H., FRANZ, E. & CORRENS, E. 1944. Zusammenhänge zwischen morphologischer Struktur und Kettenlänge bei nativen Zellulosefasern. *Kolloid.-Z.* 106, 174–187.
- FARR, W. K. 1937. Certain Colloidal Reactions of Cellulose Membranes. *J. phys. Chem.* 41, 987–995.
- FRANZ, E., WALLNER, L. & SCHIEBOLD, E. 1941. Beitrag zur Deutung übermikroskopischer Aufnahmen von Faserpräparaten. *Kolloid.-Z.* 97, 36–37.
- FREY-WYSSLING, A. 1936. Der Aufbau der pflanzlichen Zellwände. *Protoplasma* 25, 261–300.
- HAMBRAEUS, G. & RÄNBY, B. 1945. Electron microscopic investigation of precipitates of cellulose nitrates. *Nature* 155, 200–201.
- HESS, K. 1934 a. Kinematographische Quellungsanalyse. *Papierfabrikant* 32, 61–67.
- 1934 b. Morphologie und Chemismus bei den organischen hochmolekularen Naturstoffen. *Naturwiss.* 22, 469–476.
- HESS, K., KIESSIG, H. & GUNDERMANN, J. 1941. Röntgenographische und elektronenmikroskopische Untersuchung der Vorgänge beim Vermahlen von Cellulose. *Z. phys. Chemie B.* 49, 64–82.
- HUSEMANN, E. & CARNAP, A. 1943. Übermikroskopische Untersuchungen an gemahlten Cellulosefasern. *J. makromolek. Chem.* 1, 158–167.
- 1943. Übermikroskopische Untersuchungen an hydrolytisch abgebauten Fasern. *J. makromolek. Chemie* 1, 16–27.
- KRATKY, O. 1935. Über den mizellaren Aufbau und die Deformationsvorgänge bei Faserstoffen. 4. *Kolloid.-Z.* 70, 14–19.
- 1938. Über den mizellaren Aufbau und die Deformationsvorgänge bei Faserstoffen. 5. *Kolloid.-Z.* 84, 149–168.
- MAHL, H. 1941. Elektronenstrahlschäden bei übermikroskopischen Untersuchungen an Zellulosefasern. *Kolloid.-Z.* 96, 7–10.
- RUSKA, H. 1940. Über Strukturen von Zellulosefasern. *Kolloid.-Z.* 92, 276–285.
- STAUDINGER, H. & DREHER, E. 1936. Über hochpolymere Verbindungen, 138. Mittel.: Über das Zerreißen von Faden-Molekülen der Cellulose beim Vermahlen. *Ber. dtsh. chem. Ges.* 69, 1091–1098.
- STAUDINGER, H. & SORKIN, M. 1937. Über hochpolymere Verbindungen, 162. Mittel.: Über Hydrocellulosen. *Ber. dtsh. chem. Ges.* 70, 1565–1577.
- WERGIN, W. 1938. Direkte Beobachtung von  $0,2\ \mu$  grossen Strukturelementen der pflanzlichen Zellwand. *Naturwiss.* 26, 613.
- 1939. Über den Aufbau pflanzlicher Zellwände. *Protoplasma* 32, 116–139.
- 1942. Welche Aussagen gestattet die Elektronenmikroskopie über den Aufbau der Cellulosefasern? *Kolloid.-Z.* 98, 131–141.



# The Importance of Honey Bees for the Seed Set in Alfalfa.

By E. ÅKERBERG and K. LESINS

Ultuna Branch Station of the Swedish Seed Association, Uppsala.

From all countries where alfalfa now is grown and has been grown for years there are reports on varying yields of alfalfa seed. Often complete failure is reported. The seed yield is highly influenced by weather conditions as was reported by MARTIN (1915), CARLSON (1935) and WEXELSEN (1946). However, there are other factors that are of great importance for the seed set. One requirement for seed set is that the flowers are tripped. ARMSTRONG and WHITE (1935) and TORSSELL (1936) have shown this. TYSDAL (1940), KNOWLES (1943) and PEDERSEN and STAPEL (1945) emphasize that this tripping and the resulting pod set, does not occur by itself. According to our observations, which were made on a limited number of flowers, there were only 5.8 per cent pods developed in 535 isolated flowers. Alfalfa specialists seem to agree that cross pollination increases the seed yield considerably. Depression caused by inbreeding is very pronounced in alfalfa and this is particularly evident in regard to the seed set. Insects may be responsible both for the tripping of the flowers and for the cross pollination. Such insects are above all wild bees belonging to the genera *Megachile*, *Nomia*, *Melitta* and *Bombus*.

Unfortunately pollinating insects are present in insufficient numbers in this area of Sweden. During the summer of 1946 observations were made at Ultuna, at Vretaholm close to Gränna and at Årsta near Stockholm. Among the insects active in tripping alfalfa flowers only *Bombus terrestris* was found. It was present in small numbers. In numbers per hectare there were 125 at Ultuna, 79 at Vretaholm and 81 at Årsta. No species of *Megachile* or *Melitta* were in these observations found tripping the flowers. Such species were, however, seen occasionally in other alfalfa fields. One observation showed that one

*Bombus terrestris* visited 12 flowers per minute. Eighty per cent of the visited flowers were tripped. A larger amount of seeds can hardly be expected because too few of these wild bees visited the flowers.

Surprisingly high is, however, the number of honey bees. The observations at Ultuna during the last two years show that per hectare of alfalfa 18 000 bees are found when weather conditions are favorable. Still the number of flowers that are tripped are low on a percentage basis. Of 7 699 visited flowers, only 65 were tripped. This corresponds to 0.84 per cent tripping. The same low percentage of tripping has been reported by others. UFER (1932) found 0.35 %, TYSDAL (1940) 1.1 % and PEDERSEN and STAPEL (1945) 0.1–1.6 % tripping.

In order to further study the importance of honey bees under the conditions at Ultuna special net cages were constructed. The net had a mesh width of 4 mm; the cage was 5.7 m long, 2 m wide and 2 m deep. A small bee hive was placed in the cage. It was found that a certain amount of seeds were obtained in such a cage. The experiments were repeated when a cage without bees was arranged as a check. All tripping insects were kept out from that cage. The result was that hardly any seed set could be found in the alfalfa in this case. In one of the cages with bees it was noticed in this experiment that pollen collecting honey bees were present. Such could not be found during the observations in the open field where only honey seeking bees were found. In order to study the effect of these pollen collecting bees their behavior was observed. It was found that of 108 visited flowers not less than 78 were tripped. This makes a tripping percentage of 72. Consequently this tripping percentage is considerably higher than the percentage that was obtained when the visits of the bees to the flowers are studied in a regular field of alfalfa for seed.

It would be of greatest importance for our seed production of alfalfa if such an activity could be obtained also in the field by a number of the honey bees. Occasional reports on the presence of pollen collecting honey bees in alfalfa fields have come from Russia (RUDNEV 1939) and from America (*Gleanings in Bee Culture* 1946, N 5). What are the environmental factors for increasing the numbers of pollen collecting bees? Is the pollen collecting caused by the lack of easier available pollen, or by more abundant brood in the bee hive, causing a stimulation in the collecting of pollen? About this we know very little. It also seems necessary to study if it is possible to train the bees, that is make them get used to the pollen of certain plants in the same way as it is possible to make them used to the nectar of certain plants.

### Literature.

- ARMSTRONG, J. M. and WHITE, W. J. 1935. Factors influencing seed-setting in alfalfa. Jour. Agr. Sci. 25, 161-179.
- CARLSON, J. W. 1935. Alfalfa-seed investigations in Utah. Utah Agr. Exp. sta. Bul. 258.
- KNOWLES, R. P. 1943. The role of insects, weather conditions, and plant character in seed setting of alfalfa. Sci. Agric. 24, 29-50.
- MARTIN, J. N. 1915. Relations of moisture to seed production in alfalfa. Iowa Agr. Exp. sta., Research Bull. 23.
- PEDERSEN, A. og STAPEL, CHR. 1945. Undersøgelser over Lucernens Bestøvning i 1944. Tidsskrift for Frøavl Nr. 394, 176-182.
- RUDNEV, V. Z. 1939. Ptscheli povischajut urozchainostj semjan lucerni. Selekcija i semenovostvo Nr. 6, 25-27.
- TORSSELL, R. 1936. Influence of external Factors on Seed Setting in Lucerne. Lantbrukshögskolans Annaler 3, 191-241.
- TYSDAL, H. M. 1940. Is tripping necessary for seed setting in Alfalfa? Jour. Amer. Soc. Agron. 32, 570-585.
- UFER, M. 1932. Beiträge zur Blütenbiologie der Luzerne. Der Züchter 4, 281-286.
- WEXELSEN, H. 1946. Undersøkelser over blomstring, frøsetting og frøavl i luserne. Tidsskr. f. d. Norske Landbruk 53, 125-161.



# Causes of Variation in the Size and Weight of Litters from Sows

By NILS KORKMAN

Institute of Animal Breeding, Royal Agricultural College of Sweden, Uppsala

## Introduction.

Numerous investigations have been made in different countries in the last decades to elucidate the causes of variation in the production capacity of pigs. The results obtained have contributed to our knowledge of these questions, and have given valuable hints on the general lines of breed improvement. Results obtained under conditions considerably different from our own cannot always, however, be made the basis of Swedish pig breeding unless their validity has been tested under the conditions prevailing here. In Sweden, too, several investigations have been made in this field (AXELSSON 1928, 1929 a, 1929 b, and 1930, JOHANSSON 1929 a, 1929 b, and 1930, OLOFSSON and LARSSON 1930, EDIN and HELLEDAY 1935, EDIN 1938, NORDFELDT 1941, HALLQVIST 1942), but they give no complete picture of the causal connexions, and several problems are not yet solved.

Control of the pig production of the brood sows, and pig testing as practised in Denmark, was first introduced in 1923 in Sweden. This recording has in the course of years accumulated a large amount of statistical material. It was considered desirable to utilize that material for an all-round investigation of the causes of variation in the economically important characters of our bacon pigs, whereby a more reliable estimate of the breeding value of the animals, and of the efficacy of the selection, might be secured. Professor IVAR JOHANSSON therefore had all the brood sows of 8 controlled herds in south and central Sweden, and all the groups of baconers taking part in the pig testing, card-indexed at the Institute of Animal Breeding.

The analysis of the results of the brood sow control, which was done with the aid of a research grant from the Royal Swedish Aca-



demy of Agriculture, was entrusted to the present writer. The factors affecting the number of live pigs born and the size and weight of the litter at the age of 3 weeks, have been primarily studied in this investigation, but to some extent also those affecting the intervals between farrows, the mortality of the young pigs, their individual weights, and their evenness in each litter. Relevant literature will only be discussed in so far as it directly concerns our own results.

## Material and methods.

The material for this investigation has been collected from 8 swine herds in south and central Sweden subjected to brood sow control. In selecting these herds, the chief importance has been laid on their records being complete and accurate, and the primary data may thus be considered quite reliable. The data are obtained in 1923–1945, but the initial year varies slightly for the different herds. The data relating to the production results of the sows were either collected when the respective farms were visited, or else the farmers sent all their records to this Institute for extraction of the particulars. The name of the herd; the breed, date of birth and parents of the sow; the dates of all her farrows, the sires of the litters, the number of living pigs at birth and at the age of 3 weeks; the weights of the pigs and the litters at 3 weeks; and the number of teats of the sow and her parents were all entered on a separate card for each sow. It was also annotated whether pigs had been moved from one sow to another. The data on the numbers of still-born pigs are unfortunately incomplete, and for this reason they are not utilized in this investigation. On the following pages, therefore, all data on litter size at birth pertain to the number of pigs born alive, and not to the total litter size.

The animals of 5 of the herds included in the investigation — viz. Bjärka-Säby, Bollerup, Bondessons Lantbruksaktiebolag, Högby and Övrabyborg — were of the Large White breed, while those of the 3 others — Assmåsa, Blombacka, and Killegården — were of Swedish Landrace.

The statistical treatment of the material is based on the general principles laid down by FISHER (1932), SNEDECOR (1938), and BONNIER and TEDIN (1940). The shares in the total variance, which can be attributed to specified causes, has been estimated by a method worked out by WINSOR and CLARKE (1940) and applied by DICKERSON (1942) and others.

## Some different factors affecting the productive ability of the sows.

### The year of birth of the sows.

The period covered by the investigation is just over 20 years, and it may therefore be assumed that not only the average genetic properties of the sows, but also their environment, have in that time changed in some definite direction. With a view to determining whether this has actually happened, the numbers of living pigs born in each litter, the sizes of the litter, the weights of the litter and of the individual pig at 3 weeks, the interval between farrows, and the average mortality in the first 3 weeks in litters of sows born in the respective years, have been calculated (Table 1). To ensure that all the records of each

*Table 1.*  
Average performance of sows arranged in birth-year groups.

Year of birth	Number of sows	Litter size at birth	Litter size at 3 weeks	Mortality rate, %	Av. weight at 3 weeks, kg		Farrowing interval, days
					Litters	Pigs	
1923	1	10.50	7.50	28.6	39.95	5.33	243.00
1924	10	11.38	9.20	19.2	44.25	4.81	208.00
1925	18	11.04	9.21	15.7	46.37	5.03	197.02
1926	24	10.78	9.17	14.9	49.96	5.45	193.73
1927	34	10.13	8.80	13.1	48.48	5.51	182.26
1928	31	10.25	9.07	11.5	50.97	5.62	191.55
1929	35	10.44	8.64	17.2	48.72	5.64	194.50
1930	48	10.89	9.44	13.3	52.48	5.56	181.80
1931	51	10.48	9.14	12.8	50.60	5.54	185.30
1932	34	10.40	9.01	13.4	50.59	5.61	188.59
1933	28	11.07	9.68	12.6	53.55	5.53	188.18
1934	28	11.04	9.30	14.9	53.83	5.79	185.14
1935	44	10.98	9.30	15.3	57.51	6.18	184.36
1936	23	10.89	9.40	13.7	52.56	5.59	183.33
1937	22	11.24	9.66	14.1	56.73	5.87	181.18
1938	34	10.99	9.01	18.0	53.27	5.91	187.56
1939	32	10.52	8.83	16.1	51.40	5.82	196.36
1940	44	11.07	9.48	14.4	51.93	5.48	200.22
1941	28	10.60	9.21	13.1	53.35	5.79	190.95
1942	4	9.44	7.56	19.9	47.27	6.25	190.50
Total and av.	573	10.74	9.17	14.6	51.79	5.65	189.16

Table 2.

Variance in performance between birth-year groups of sows.

Source of variance	D/f	Litter size at birth			Litter size at 3 weeks		
		Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance	Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance
Between birth-year groups ..	19	14.211 <sup>a</sup>	0.058	0.80	11.839 <sup>a</sup>	0.049	0.83
Between litters within groups	2272	7.203	7.203	99.20	5.886	5.886	99.17
Total variance.....	2291	7.261	7.261	100	5.935	5.935	100

Source of variance	D/f	Litter weight at 3 weeks, kg			Farrowing interval, days		
		Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance	Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance
Between birth-year groups ..	19	973.24 <sup>1</sup>	6.43	3.15	5287.9 <sup>1</sup>	31.5	2.07
Between litters within groups	2272	197.47	197.47	96.85	1492.1	1492.1	97.93
Total variance.....	2291	203.90	203.90	100	1523.6	1523.6	100

In all the Tables of this paper the significance of mean squares and correlation coefficients are indicated as follows:

<sup>1</sup>  $P < 0.001$ ; <sup>a</sup>  $P < 0.01$ ; <sup>\*</sup>  $P < 0.05$ ; <sup>\*</sup>  $P > 0.05$ .

group shall actually refer to the same year, only sows with a minimum of 5 farrows have been included in the investigation, and the Table is based on the results of the first 4 of these farrows. Both breeds have been dealt with jointly.

It is hardly possible to distinguish any definite trend in the variations from one year to another in the number of pigs born in each litter, but the largest litters, and the highest weights of the pigs — and consequently also of the litters — at 3 weeks have apparently been produced by sows born in the period 1933–1938. Generally speaking, the litter and individual pig weights also seem to be largest in the second half of the period investigated. The average interval between farrows, however, is shortest for the sows born in the middle of the period, and longer for those born at its beginning or end. Sows born in 1933–1938 have thus the highest production per unit of time.

To ascertain whether the differences between the individual birth-year groups must be ascribed to certain definite causes, or might be

regarded as merely fortuitous, and to determine how great a part the variance due to the year of birth of the sow is of the total variance between the litters, the figures have been analysed with the results given in Table 2.

This Table shows that the year of birth of the sow has influenced the weight of the litter at 3 weeks and the length of the interval between farrows relatively most, while the number of pigs at birth and the size of the litter at 3 weeks have been but slightly affected.

### **The connexion between the litter size at birth and at 3 weeks, and the weight of the litter at 3 weeks.**

Only farrows Nos. 3 to 7 have been included in the investigation of the influence of the litter size at birth on the production of 3 weeks old pigs. This has been done in order to eliminate the main part of the effect of the age of the sow, as previous investigations (e. g. JOHANSSON 1932, KRIZENECKY 1935, OLSEN 1939, and LUSH and MOLLN 1942) have shown that conditions in the first and second litters in particular, but also in litters of high numbers, differ in several respects from those in other litters. Cases where the sow has died within 3 months of the farrow have also been excluded. Seeing that in one of the examined herds the average litter size at birth differs greatly from the average in other herds of the same breed, that herd has not been included in preparing Table 3, which summarizes the results.

Table 3 shows how the litter size at birth affects the size and weight of the litters and the weight per pig at 3 weeks, and the mortality in the first 3 weeks. This Table includes the aggregate material of both breeds. The coefficient of correlation of the number of pigs born living in each litter to the size of the litter at 3 weeks is  $+0.669$  ( $P < 0.001$ ), and the coefficient of regression  $0.591$ , while the corresponding coefficients of the number of pigs born in each litter to the weight of the litter at 3 weeks are  $+0.445$  ( $P < 0.001$ ) and  $2.231$ . The correlation is thus quite significant, but the regressions are by no means linear, and are accordingly not correctly reflected by the coefficients. To give a better idea of the effect of the number of pigs born in each litter on the size and weight of the litter at 3 weeks, their interrelations have been graphically illustrated in Fig. 1. Note that in this graph the units of length correspond to the same number of  $\sigma$  units of the respective characteristics on both the  $x$  and the  $y$  axes, and that the size and weight averages of litters at 3 weeks lie at the same point of

Table 3.

Litter size and weight at three weeks, pig mortality and av. pig weight in relation to litter size at birth.

Litter size at birth	Number of litters	Litter size at 3 weeks	Mortality rate, %	Av. weight at 3 weeks, kg	
				Litters	Pigs
2	2	2.00	0.0	12.5	6.23
3	14	2.08	30.7	17.2	8.25
4	17	2.65	33.8	20.0	7.56
5	48	4.19	16.2	29.3	7.00
6	77	5.22	13.0	34.9	6.69
7	135	6.45	7.9	40.5	6.28
8	204	7.19	10.1	44.8	6.23
9	274	7.97	11.4	47.4	5.94
10	441	8.68	13.2	49.5	5.71
11	457	9.31	15.4	51.9	5.57
12	456	10.01	16.6	55.2	5.51
13	323	10.47	19.5	56.8	5.42
14	275	10.74	23.3	57.2	5.33
15	150	11.01	26.6	57.1	5.18
16	95	11.17	30.2	56.6	5.06
17	25	11.16	34.4	55.5	4.98
18	20	10.90	39.4	54.5	5.00
19	8	10.62	44.1	50.7	4.77
20	2	11.50	42.5	66.5	5.62
21	2	9.00	57.1	42.5	4.72

the  $y$ -axis. The equations of regression for the ratios of litter sizes and weights at 3 weeks to the number of pigs born in each litter were calculated on the assumption that they are of the third degree, and the curves were plotted in the figure. But the equation for the litter size proved rather to be of the second degree, the result being

$$y_1 = -2.824 + 1.633x - 0.0475x^2, \text{ and}$$

$$y_2 = -7.998 + 9.430x - 0.4040x^2 + 0.00430x^3,$$

where  $x$  = the number of pigs born in a litter,  $y_1$  = the size and  $y_2$  = the weight of the litter at 3 weeks, in kg.

The effects of the number of pigs born in each litter on the mortality in the first 3 weeks and on the pig-weight at 3 weeks are separately studied in Fig. 2. The graph shows that the mortality rate is highest in small and large litters, and lowest when the number of pigs born

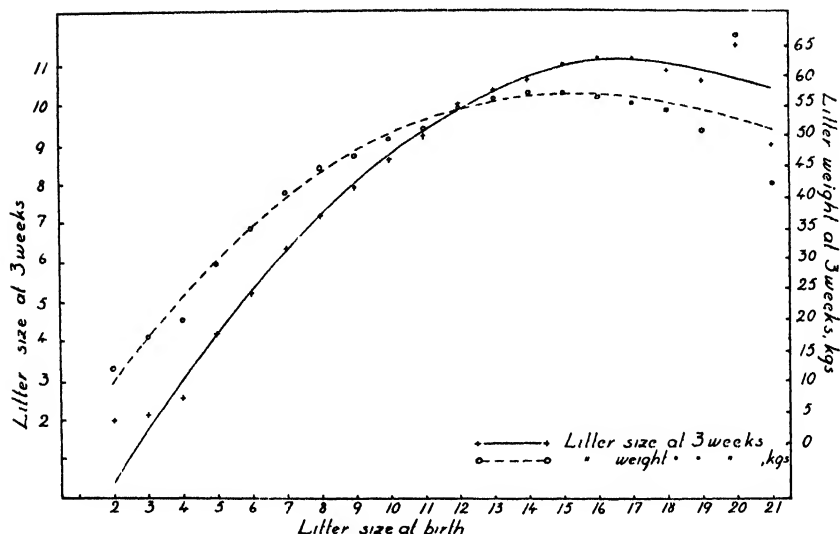


Fig. 1. Litter size and weight at 3 weeks in relation to the number of pigs farrowed.

ranges from 7 to 9. On the assumption that in this case, too, the equation of regression is of the third degree, we obtain

$$y_3 = +26.474 - 3.234x + 0.1395x^2 + 0.00500x^3,$$

where  $x$  = the number of pigs born in each litter, and  $y_3$  = the mortality of pigs in the first 3 weeks. The corresponding curve is plotted in the figure.

The average weight of the pigs diminishes with the number of pigs born in each litter, but this relation is not linear either; it may be most closely expressed by the equation

$$y_4 = +9.123 - 0.533x + 0.0229x^2 - 0.00032x^3,$$

where  $x$  is still = the number of pigs born in each litter and  $y_4$  = the pig weight at 3 weeks in kg. The curve of this equation is also plotted in the figure.

The variation in litter size and weight at 3 weeks due to differences in litter size at birth, has also been analysed (Table 4). The variance has been calculated for each breed separately, but the analysis shows, that there is no significant difference between the breeds in this respect. In the same way as the correlation of the number of pigs born in each litter to the size of the litter at 3 weeks is larger than the correlation of the former to the weight of the litter at 3 weeks, we find that differences in the litter size at birth makes a greater variance in the size of

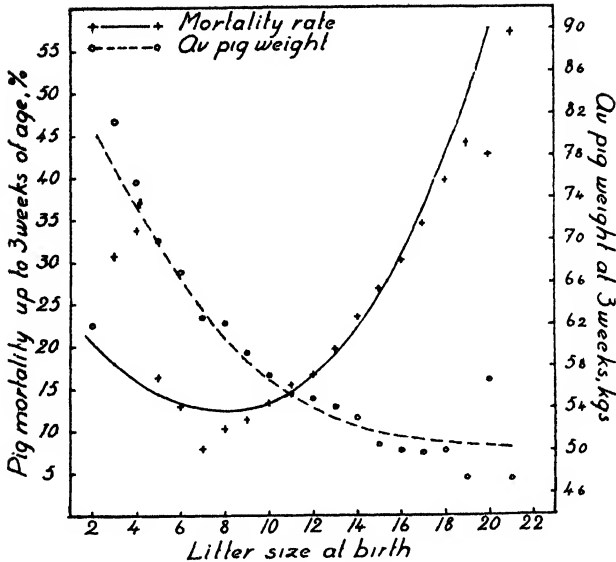


Fig. 2. Average pig weight in the litters at 3 weeks, and pig mortality up to the same age, in relation to the number of pigs farrowed.

the litter than in the weight of the litter at 3 weeks. The calculated percentages of the total variance are 52.60 % of the former and only 24.94 % of the latter.

The relation of litter size to litter weight at 3 weeks has been ex-

Table 4.

Variance in litter size and weight at 3 weeks due to the variation in litter size at birth.

Source of variance	D/f	Litter size at 3 weeks			Litter weight at 3 weeks, kg		
		Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance	Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance
Between breeds.....	1	274.632 <sup>4</sup>	0.010	0.17	3936.44 <sup>4</sup>	—	—
Within breeds:							
Between groups of litters of different-sizes at birth ....	35	259.865 <sup>1</sup>	3.144	52.60	4032.15 <sup>1</sup>	47.57	24.94
Within groups of litters of equal-sizes at birth .....	2988	2.823	2.823	47.23	143.16	143.16	75.06
Total variance.....	3024	5.888	5.977	100	189.42	190.73	100

*Table 5.*

The relation of litter weight and av. pig weight to litter size at 3 weeks.

Litters at 3 weeks of age			
Litter size	Frequency	Litter weight, kg	Av. pig weight, kg
0	9	—	—
1	2	6.0	5.95
2	5	13.5	6.13
3	15	23.5	7.81
4	46	27.7	6.93
5	88	33.0	6.60
6	158	37.4	6.22
7	352	42.5	6.06
8	478	47.8	5.97
9	526	52.1	5.79
10	564	56.4	5.64
11	439	60.6	5.51
12	252	63.7	5.30
13	139	67.8	5.21
14	41	71.3	5.09
15	7	75.6	5.03
16	3	86.5	5.40

amined in the same way. This examination included the results of all farrows from the 3rd to the 7th in all the herds. As no appreciable difference between the two breeds could be observed here either, both have been dealt with as one. Table 5 surveys these relations.

The litter weight apparently increases fairly evenly with the litter size, and the connexion of litter size to litter weight thus seems to be almost linear. The correlation of these two characteristics within the breeds is  $+0.686$  ( $P < 0.001$ ), and the regression of litter weight on litter size is 3.743. For each additional pig in a litter the litter weight will thus be increased by 3.743 kg. But we have already seen from the pig weights that the relation of litter size to litter weight is not quite linear, for the pig weights are largest in litters of 3, and are smaller in both larger and smaller litters. Litters of less than 3 pigs are so few, however, that they do not appreciably affect the relevant coefficients of correlation and regression if these are computed on the assumption of a linear correlation, which seems to be true of litters of 3 or more pigs. Computed in this way, the coefficient of correlation of litter size to pig weight at 3 weeks will be  $-0.738$  ( $P < 0.001$ ) and the regression of the pig weight on litter size  $-0.153$ .



In order to throw further light on these conditions, the effect of the litter size on the litter weight and pig weight at 3 weeks is graphically illustrated in Figs. 3 and 4. The points and crosses marked in these figures show conditions in the different breeds, while the full-drawn lines show conditions when breed differences are disregarded.

The curved lines of regression have not been mathematically computed in this case, but are only graphically smoothed. Fig. 3 shows clearly how uniform conditions are in the two breeds, and also that the connexion is not quite linear. Fig. 4 also shows the same for each breed. In both breeds the pigs are heaviest when the number of pigs is 3.

The variations of the litter weights between groups of different litter sizes at 3 weeks, when litter size is the same within each group, have been correspondingly analysed as in Table 4. The result shows that 55.12 % ( $P < 0.001$ ) of the total variance is due to differences in the litter size at 3 weeks.

As it has been shown that the number of pigs born in each litter, the litter size at 3 weeks, and the litter weight at 3 weeks, are all correlated, the correlation of two of these characteristics has also been calculated on the assumption in each case that the third will remain unchanged. The result of this calculation is that, at constant litter weight, the correlation of the number at birth to the litter size at 3 weeks will be  $+ 0.559$  ( $P < 0.001$ ), while the corresponding figure for the relation of litter size to litter weight at 3 weeks will be  $+ 0.583$  ( $P < 0.001$ ) at a constant number of pigs at birth. If the litter size at 3 weeks remains constant, on the other hand, the correlation of the number at birth to the litter weight at 3 weeks will be  $- 0.019$  ( $P > 0.05$ ). The litter weight will thus increase only in the event of the litter size at 3 weeks being larger.

The correlation between the litter size at 3 weeks and the deviation in weight of the individual pigs from the average of the litter has been computed with a view to ascertain how far the number of pigs in a litter affects the variation in weight of the individual pigs. In order to be able to use the same units in measuring the evenness of the pigs within as well as between litters, we have accordingly not made use of standard deviation or coefficient of variation in the litters, as in previous investigations, but have instead used the numerical value of the deviation of the individual pig from the average weight of the litter. This investigation covers the results of the first 5 farrows of every sow in respect of which particulars are available of all these farrow results. Litters in which at 3 weeks there has only been 1 pig are not

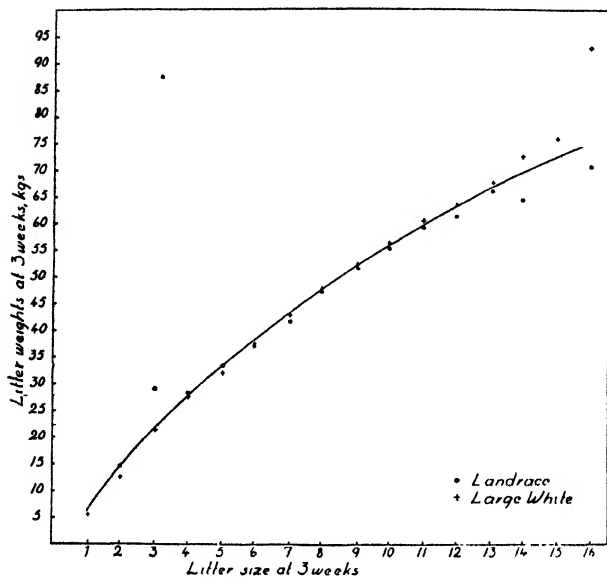


Fig. 3. The relation of litter size to weight at 3 weeks.

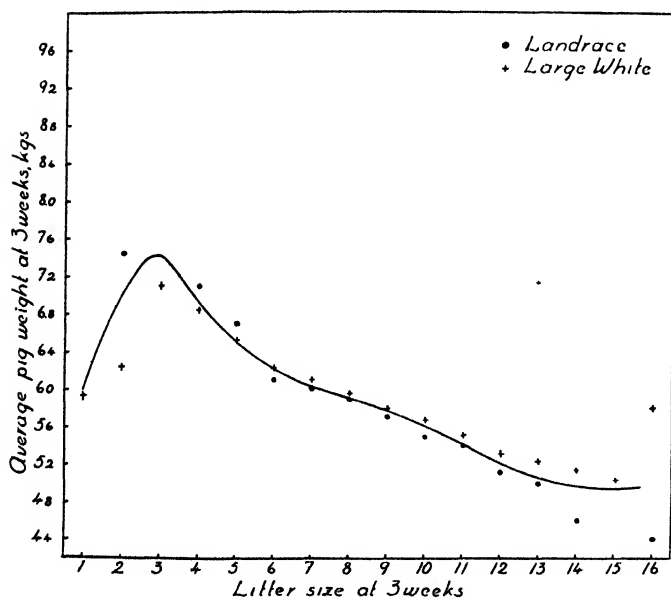


Fig. 4. Average pig weight in relation to litter size, at 3 weeks of age.

*Table 6.*

Average deviation of the individual pig weight at three weeks from the litter average.

Litters at 3 weeks of age		
Litter size	Frequency	Deviation from litter average, kg
2	3	0.72
3	6	0.48
4	34	0.68
5	82	0.68
6	148	0.72
7	268	0.76
8	353	0.70
9	425	0.74
10	459	0.74
11	377	0.77
12	229	0.77
13	118	0.86
14	41	0.98
15	9	0.84
16	1	1.15

included, as in them no comparisons are possible, the deviation being always nil. The investigation thus covers in all 23 727 pigs of 2 553 litters from 517 sows. The average deviation in the whole material is 0.758 kg. The results are surveyed in Table 6.

We find that the deviation of the individual pigs from the litter average is slightly larger in large than in small litters. The total correlation between litter size and the deviation of the individual pigs from the average litter weight is  $+0.076$  ( $P < 0.001$ ). The corresponding coefficient of regression is  $+0.028$ , which means that an increase of one pig in a litter will increase the average deviation by 0.028 kg.

As the relation of litter order to litter size, as well as inter-herd differences, may be expected to affect the correlation between the litter size and the deviation of the pigs from the average weight in the litter, the same correlation has also been computed for corresponding litter orders in the different herds. This coefficient is slightly lower, viz.  $+0.067$  ( $P < 0.001$ ), but the coefficient of regression remains practically unchanged, viz.  $+0.026$ . The equation of the linear regression is  $y = 0.503 + 0.026x$ , where  $y$  = the deviation in weight of the individual pigs from the average in the litter at 3 weeks, and  $x$  = the number of pigs in the litter at 3 weeks.

### The number of teats per sow.

The influence of the number of teats per sow on the number of pigs born, and on the litter size and litter weight at 3 weeks has been examined, taking into account all farrow orders from 3 to 7. The low and high farrow orders have been excluded in order to make the material as homogeneous as possible in everything save the number of teats per sow. Herds excluded from Table 3 have in the same way and for the same reasons also been excluded from this investigation. Table 7 shows the conditions in each breed separately.

The material was next studied to determine the connexion, if any, between the number of teats and the number of pigs born in each litter. To avoid interbreed differences affecting the result, all correlations have been calculated separately for the two breeds. The correlation between the number of teats and the number of pigs born is  $r = 0.014$ , but this coefficient is not significant ( $P > 0.05$ ). The correlation between numbers of teats and litter sizes at 3 weeks is slightly higher, or  $r = 0.047$  ( $P < 0.02$ ). The correlation of numbers of teats to litter weights at 3 weeks is stronger, the coefficient being 0.095 ( $P < 0.001$ ). The coefficient of regression of litter sizes at 3 weeks to numbers of teats is 0.125, and of litter weights at 3 weeks to numbers of teats 1.499.

To ascertain how the number of teats affects litters of different sizes, the number of pigs at birth have been compared with the differences in litter weights and numbers of pigs at 3 weeks between sows with 14–17 teats and sows with 12–13 teats (Fig. 5).

Table 7.

Performance of sows with various number of teats.

Number of teats	Large White						Landrace					
	Fre- quency of litters	Litter size		Mor- tality, %	Av. weight at 3 weeks		Fre- quency of litters	Litter size		Mor- tality, %	Av. weight at 3 weeks	
		at birth	at 3 weeks		Litters	Pigs		at birth	at 3 weeks		Litters	Pigs
12	260	11.7	9.2	21.0	49.2	5.3	123	10.4	8.5	18.7	48.0	5.7
13	467	11.4	9.1	19.7	49.5	5.4	204	10.1	8.5	16.7	48.6	5.8
14	1078	11.6	9.4	18.9	53.0	5.7	558	10.2	8.7	14.9	49.6	5.7
15	143	11.4	9.4	18.0	53.8	5.8	120	10.6	9.3	13.1	51.1	5.5
16	49	12.3	9.4	23.6	53.2	5.7	17	10.6	8.7	18.3	49.2	5.7
17	—	—	—	—	—	—	6	10.7	9.2	14.1	49.0	5.4

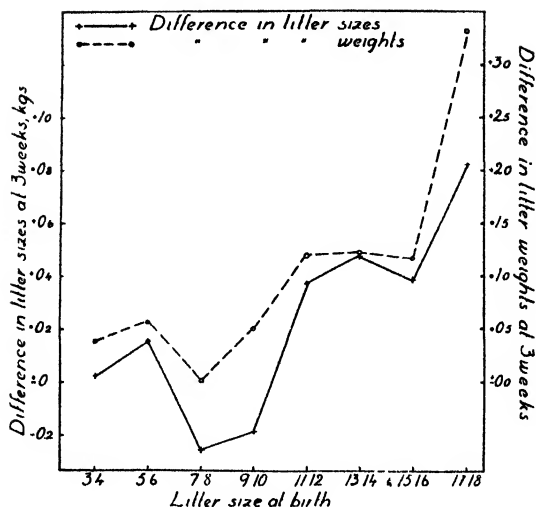


Fig. 5. The difference in litter size and weight at 3 weeks between sows with 12-13 and 14-17 teats in relation to the number of pigs farrowed.

This comparison shows that differences in the numbers of teats do not affect the litter size at 3 weeks until the number of pigs born in each litter is at least 11-12, while in both breeds sows with more teats produce a slightly higher litter weight. The latter effect, however, is slight also in litters of less than 11 pigs at birth.

In Table 8 we have finally, with reference to the same material, computed how much of the total variance in litter size and litter weight at 3 weeks may be ascribed to differences in the number of teats of the sows — irrespective of the number of pigs born in each litter.

The very fact that the number of teats is more closely correlated to litter weights than to litter sizes at 3 weeks indicated that the number of teats affects the litter weight more than the litter size, and this is confirmed by the analysis of variance in Table 8. Although the correlation analysis proved the number of teats to have a significant influence on the litter size at 3 weeks, the part of the variance due to this cause is only 0.18 %, and the corresponding P-value is larger than 0.05. The effect of the number of teats on the litter weights is fully significant ( $P < 0.001$ ), however, and its share in the total variance is 1.12 %.

The influence of the number of teats on the evenness of the litters has been examined in the part of the material comprising sows with particulars of all their first 5 farrows as well as of their number of teats. That examination includes a total of 517 sows, for which each farrow

Table 8.

Variance in litter size and weight at 3 weeks between groups of sows with various number of teats.

Source of variance	D/f	Litter size			Litter weight		
		Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance	Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance
Between breeds .....	1	274.632 <sup>1</sup>	0.176	2.94	3936.44 <sup>4</sup>	2.09	1.10
Within breeds:							
Between groups of sows with different numbers of teats.	9	8.803 <sup>4</sup>	0.011	0.18	755.22 <sup>1</sup>	2.14	1.12
Within groups of sows with equal numbers of teats....	3014	5.790	5.790	96.87	186.43	186.43	97.78
Total variance.....	3024	5.888	5.977	100	189.42	190.66	100

Table 9.

Average deviation of individual pig weights from the average in the litter, in relation to the number of teats of the sow.

Number of teats	Litter order											
	1		2		3		4		5		1—5	
	Number of pigs	Av. deviation, kg	Number of pigs	Av. deviation, kg	Number of pigs	Av. deviation, kg	Number of pigs	Av. deviation, kg	Number of pigs	Av. deviation, kg	Number of pigs	Av. deviation, kg
12	507	0.66	561	0.76	582	0.76	524	0.80	536	0.87	2710	0.77
13	936	0.63	1007	0.72	973	0.77	990	0.76	957	0.78	4863	0.74
14	2400	0.68	2615	0.72	2593	0.81	2518	0.83	2469	0.83	12595	0.78
15	340	0.64	349	0.69	302	0.74	361	0.79	347	0.74	1699	0.72
16	70	0.65	73	0.84	93	0.94	74	1.09	67	0.91	377	0.89
17	14	0.56	10	0.87	11	0.90	9	1.05	10	1.17	54	0.88

order has been dealt with separately. The results are summarized in Table 9. This shows that an increase in the number of teats from 12 to 15 will cause but a small increase in the average deviation of the pigs in the litter, but this deviation increases again considerably when the number of teats is larger. The significance of the deviation of individual pigs from the average weight in the litter, which is due to differences in the number of teats, is examined in Table 10. This shows that in litters of the same order the difference due to the sows' having different numbers of teats is significant ( $P < 0.001$ ). As,

Table 10.

Variance in the deviation of the individual pig weights due to variation in the number of teats of the sows.

Source of variance	D/f	Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance
Between litter orders. ....	4	20.5075 <sup>1</sup>	0.0043	1.09
Within litter orders:				
Between groups of sows with different numbers of teats..	25	1.1292 <sup>1</sup>	0.0010	0.25
Within groups of sows with equal numbers of teats ....	22268	0.3901	0.3901	98.66
Total variance .....	22297	0.3946	0.3954	100

moreover, we have already seen (in Table 7) that the litter sizes at 3 weeks increase slightly with the number of teats — at least up to 15 teats — we may conclude that the reduced deviation of the pigs from the average weight in the litter, which is noticeable when the number of teats increases from 12 to 15, is actually due to the higher number of teats and not to any difference in the number of pigs. We have also found that a larger number of pigs is generally accompanied by a greater deviation of the individual pigs from the litter average (see Table 6).

The results of different farrows orders, where the numbers of teats are equal show how pigs of the same sows have deviated from the average weight of the pigs of differently numbered farrows. As part of the differences between the several sows may be due to other individual differences in them, the results of farrows Nos. 2–5 have in Fig. 6 been compared with the results of the first farrow in order to eliminate at least the greater part of these individual differences. The differences in the average deviations in farrows Nos. 2–5, and the average deviations in the first farrows, have been computed for groups of sows having different numbers of teats. The Figure shows that whether the number of teats is smaller or larger, the deviations in each group are larger in the later farrows, but this difference is least for sows with 15 teats and largest in sows with more than 15 teats. In the first farrow, on the other hand, no such unfavourable effect of a large number of teats can be discerned (see Table 9). The question whether these differences between farrows of different orders in the effect of the number of teats on the deviation of the pigs from the average weight in the litter is significant or not, has been investig-

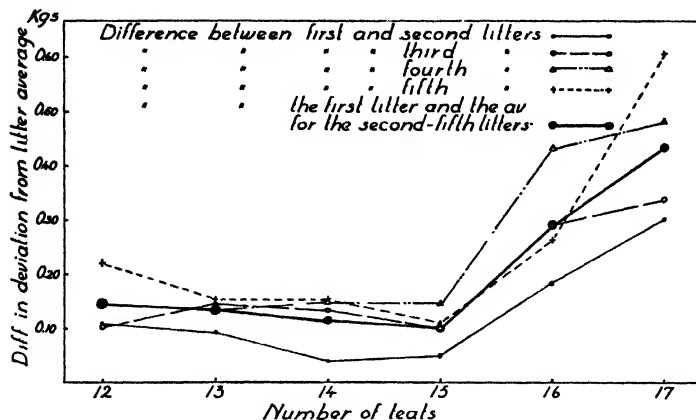


Fig. 6. The difference between the first and subsequent litters in the deviation of the individual pig weights at 3 weeks from the litter averages of groups of sows with various number of teats.

ated by computing the linear regression of the deviation of the pigs on the number of teats, and an analysis has subsequently been made in order to determine whether there is any significant difference in the directions of the corresponding lines of regression. The coefficients of regression of the several farrows are:

1st farrow	+	0.007	( $P > 0.05$ )
2nd	»	+ 0.013	( $P > 0.05$ )
3rd	»	+ 0.022	( $P < 0.05$ )
4th	»	+ 0.030	( $P < 0.05$ )
5th	»	+ 0.008	( $P > 0.05$ )

Table 11 shows how the significance of the differences between these regression-coefficients has been examined. It is found that the differences between the lines of regression of farrows of different numbers are significant ( $P < 0.05$ ).

### The age of the sows.

#### *The age of the sows at the first farrow.*

In order to study the influence of the sow's age on the production result of her first farrow, particulars of the numbers of pigs born, litter size, litter weight, and average weight of the pigs at 3 weeks, as well as the mortality in the first 3 weeks, have been collected for all



Table 11.

The significance of differences between the coefficients of regression for the deviation of individual pig weights from the average in the litter, on the number of teats of the sow, within farrows of the same order.

Source of variance	D/f	Residual square	Mean residual square
Distribution of the variates in relation to the parallel regression lines within groups.....	22292	8714.7	
Distribution of the variates in relation to the regression lines of the groups .....	22288	8710.2	0.3908
Error = differences between the regression coefficients of the groups .....	2	4.5	1.1250

$$\text{Quotient } \frac{1.1250}{0.3908} = 2.879 \text{ (} P < 0.05 \text{)}$$

Table 12.

Size and weight of the first litter from sows of various ages.

Large White							Landrace						
Number of sows	Age at first farrow months	Litter size		Mortality rate, %	Av. weight at 3 weeks, kg		Number of sows	Age at first farrow months	Litter size		Mortality rate, %	Av. weight at 3 weeks, kg	
		at birth	at 3 weeks		Litters	Pigs			at birth	at 3 weeks		Litters	Pigs
1	8	8.0	8.0	0.0	42.5	5.3	—	—	—	—	—	—	—
2	9	11.5	7.5	34.8	42.5	5.7	—	—	—	—	—	—	—
9	10	9.0	8.2	8.6	45.8	5.6	8	10	8.7	7.6	12.9	43.7	5.8
31	11	9.6	7.9	18.5	42.1	5.3	41	11	8.0	7.2	10.0	38.3	5.3
91	12	9.4	8.2	12.0	45.0	5.5	83	12	9.0	7.7	14.6	39.3	5.1
183	13	9.6	8.5	11.0	46.4	5.5	82	13	9.0	7.9	11.8	41.7	5.3
172	14	10.4	9.3	10.7	49.5	5.3	62	14	9.5	8.0	14.8	43.5	5.4
160	15	10.4	9.0	14.0	47.5	5.3	45	15	8.6	7.3	14.8	39.7	5.4
123	16	10.7	9.4	12.3	51.0	5.4	27	16	10.1	8.7	13.9	46.0	5.3
75	17	10.3	9.1	11.7	51.8	5.7	21	17	9.3	8.1	12.8	45.6	5.6
52	18	10.6	9.4	11.8	51.0	5.4	11	18	9.0	7.6	15.2	44.7	5.9
35	19	10.1	9.2	9.6	52.3	5.7	7	19	8.6	8.3	3.3	46.7	5.6
16	20	9.9	8.0	19.0	45.7	5.7	6	20	6.8	6.7	2.4	42.5	6.3
11	21	11.3	10.2	9.7	57.9	5.8	3	21	8.0	6.7	16.7	45.8	6.8
5	22	10.0	9.0	10.0	53.5	5.9	1	22	8.0	8.0	0.0	47.5	5.9
2	23	12.5	11.5	8.0	52.5	4.6	—	—	—	—	—	—	—
968	14.76	10.30	8.91	12.11	48.47	5.44	397	13.14	8.97	7.79	13.14	41.66	5.35

*Table 13.*

Correlation between the age (in months) of the sows at first farrow and the size and weight (in kg) of the litter.

Correlated		D/t	Correlation coefficients	Regression coefficients
Age of sows and litter size at birth	Large White . . . . .	966	+0.131 <sup>1</sup>	+0.141
	Landrace . . . . .	395	+0.025 <sup>4</sup>	+0.026
	Within breeds (av.) . . .	1362	+0.102 <sup>1</sup>	+0.109
Age of sows and litter size at 3 weeks	Large White . . . . .	966	+0.126 <sup>1</sup>	+0.131
	Landrace . . . . .	395	+0.035 <sup>4</sup>	+0.034
	Within breeds (av.) . . .	1362	+0.102 <sup>1</sup>	+0.104
Age of sows and litter weight at 3 weeks	Large White . . . . .	966	+0.160 <sup>1</sup>	+0.968
	Landrace . . . . .	395	+0.151 <sup>2</sup>	+0.796
	Within breeds (av.) . . .	1362	+0.157 <sup>1</sup>	+0.919

the sows divided into age groups. Ages are given in months, and a month is also the class interval of the group. Each breed is dealt with separately, but differences between herds have been disregarded. The results are shown in Table 12.

This investigation comprised 968 sows of the Large White breed and 398 of the Swedish Landrace, or 1 365 sows in all. In the first-named breed the average farrowing age was 14.76 months, and in the latter 13.14 months. The Table shows that primarily the litter weights, but to some extent also the litter size at birth and at 3 weeks, increase with the age. The effect on the litter size was not very pronounced in the Landrace sows, however, but owing to the small numbers in the several groups of this breed the Table does not reflect the conditions there quite clearly. As the relations of sow age to the said characteristics seem to be almost linear, particularly in the Large White breed, which constitutes the majority of the total material, the coefficients of correlation and regression have been computed on the assumption that relations are linear. The correlation and regression are computed a) for each breed, and b) within the breeds (Table 13).

In this connexion the possible existence of significant differences between the regression lines of the two breeds has been investigated, in the first place by ascertaining whether these lines are further apart than could have been considered fortuitous if each breed had been regarded merely as part of a homogeneous population (Table 14). The lines of regression were found not to coincide, and the difference was fully significant.

*Table 14.*

Differences between the two breeds with regard to the lines of regression for size of the first litter at birth on the farrowing age of the sow.

Source of variance	D/f	Residual squares	Mean residual squares
Distribution of variates in relation to the total regression line .....	1363	8361.64	
Distribution of variates in relation to the parallel regression lines within breeds .....	1362	8058.19	5.9164
Error = differences between the two breeds in regard to their lines of regression .....	1	303.45	303.45

Quotient  $\frac{303.45}{5.9164} = 51.29$  ( $P < 0.001$ ).

*Table 15.*

Differences between the two breeds with regard to the coefficients of regression for the size of first litter at birth on the farrowing age of the sow.

Source of variance	D/f	Residual squares	Mean residual squares
Distribution of variates in relation to the parallel regression lines within breeds .....	1362	8058.19	
Distribution of variates in relation to the regression line of each breed .....	1361	8039.33	5.9069
Error = differences between the two breeds in regard to their regression coefficients .....	1	18.86	18.86

Quotient  $\frac{18.86}{5.9069} = 3.19$  ( $0.2 > P > 0.05$ ).

The inter-breed differences in the lines of regression for the influence of age on litter sizes and litter weights at 3 weeks were then correspondingly examined. In this case the corresponding quotients with equal degrees of freedom were 51.30 ( $P < 0.001$ ) and 54.00 ( $P < 0.001$ ). This examination does not show that the differences in the coefficients of regression are significant, however, but only that the lines of regression are not coincident. The analysis in Table 15 has been undertaken with a view to determine whether also the differences between the coefficients of regression are significant.

The inter-breed differences in the coefficients of regression for the influence of age on the number of pigs born in each litter, and on litter

*Table 16.*

Sow performance at various order of farrows.

Farrow order	Frequency of litters	Number of pigs per litter		Mortality rate, %	Av. weight at 3 weeks, kg	
		at birth	at 3 weeks		Litters	Pigs
1	1168	9.7	8.5	12.4	45.5	5.37
2	952	10.3	8.8	14.0	50.1	5.67
3	816	10.9	9.1	16.5	51.4	5.66
4	683	11.0	8.8	20.6	49.5	5.65
5	566	11.0	8.9	19.0	50.6	5.67
6	446	11.0	8.5	22.9	48.0	5.64
7	336	10.8	8.5	21.7	48.1	5.68
8	228	10.7	8.1	24.5	45.2	5.61
9	136	10.7	8.4	21.8	47.4	5.67
10	79	10.6	7.8	26.0	46.2	5.90
11	41	10.4	8.1	22.7	44.3	5.49
12	16	10.0	7.8	21.9	46.8	6.00
13	8	10.0	8.4	16.2	46.8	5.59
14	6	10.3	7.8	24.2	41.6	5.32
15	2	9.5	8.0	15.8	47.5	5.93
16	2	9.0	8.5	5.6	47.5	5.58
17	1	8.0	6.0	25.0	37.5	6.24

size and weight at 3 weeks, are not significant. There is thus nothing to indicate that the age might have a different effect on sows of the two breeds.

#### *The order of the farrow.*

For a survey of the connexion between the order of farrow and the production results, the litters are in Table 16 grouped by farrows of the same order, both breeds together, and the average of each group has been computed. The Table comprises all sows in respect of which results are available right from the first farrow until the sows were discarded as brood sows.

The differences between the two breeds are considerable. Mentioning the averages of the Large White breed in this material first, and those of the Landrace afterwards, the number of pigs born are 10.79 and 9.76, the litter size at 3 weeks 8.80 and 8.31, the mortality in the first 3 weeks 18.52 and 14.82, the litter weight at 3 weeks 49.44 and 46.35, and the av. pig weight at 3 weeks 5.62 and 5.58. But the relative numbers of sows of each breed are so even in the several age

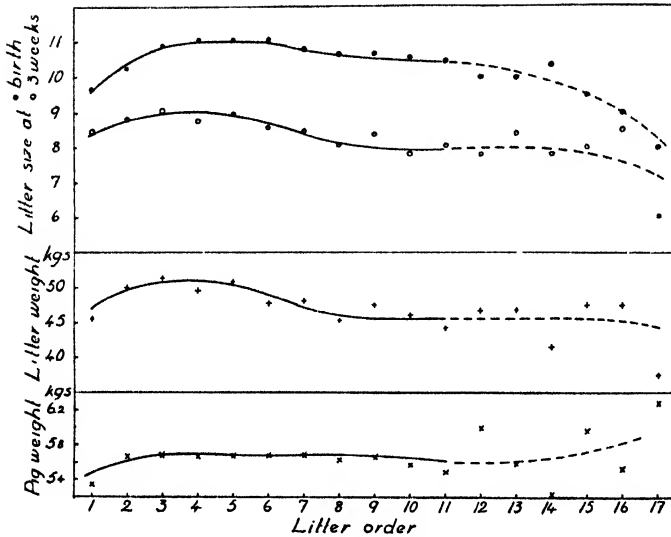


Fig. 7. Litter size at birth and litter weight and average pig weight at 3 weeks in litters of various order.

groups that a unification of the material is justifiable. The Large White litters average 73.6 % of farrows Nos. 1-4, 76.9 % of farrows 5-8, 75.0 % of farrows 9-12, and 55.6 % of farrows Nos. 13-16.

Table 16 shows that considerably fewer pigs are born in the first litter, and that the number increases rapidly to culminate between the fourth and sixth litters, and then diminishes gradually. The weights of the individual pigs at 3 weeks, on the other hand, are but little affected by the order of the farrow. In the first litter alone the pigs are distinctly lighter than in subsequent litters. The rate of mortality in the first 3 weeks is lowest in the first litter, but from the fourth litter onwards the variation is slight. Fig. 7 gives a clear picture of the relations of the order of farrow to the number of pigs born in each litter, litter size, litter weight, and av. pig weight at 3 weeks.

The fact that the sows included in this schedule have been discarded after varying order of farrows might, however, have had some influence on the result. To ascertain whether this is so, some data have in Table 17 been computed for groups of sows discarded after the same order of farrow. With the object that the results should be as little affected as possible by the varying number of sows of different herds and breeds, these results are computed as averages of herd and breed averages. Further, the last farrow before culling has not been

Table 17.

Performance within groups of sows, which were culled after the same numbers of farrows.

Farrow order	Litter size at birth			Litter size at 3 weeks			Litter weight after 3 weeks, kg		
	Sows were culled after the following farrow orders								
	5	8	11	5	8	11	5	8	11
1	9.6	9.6	9.9	8.4	8.4	8.4	46.7	45.1	45.8
2	10.5	10.4	12.1	9.2	9.6	10.4	52.0	55.0	58.4
3	10.9	11.0	12.2	9.0	9.1	10.1	52.8	52.6	53.7
4	10.9	11.1	12.4	8.7	8.9	9.4	51.4	51.7	55.6
5	—	11.2	12.3	—	9.5	9.5	—	55.8	56.6
6	—	11.6	12.2	—	9.1	9.5	—	53.1	54.3
7	—	10.4	11.5	—	8.4	9.5	—	50.4	58.7
8	—	—	12.8	—	—	8.5	—	—	42.7
9	—	—	13.3	—	—	9.0	—	—	52.5
10	—	—	12.9	—	—	9.1	—	—	54.4

included, as a sow will obviously frequently be discarded on account of some disturbance in the farrow of a temporary nature. The Table shows that the tendencies in the different groups are essentially the same as the tendency in the whole material. The maximum number of live pigs at 3 weeks, however, is here attained already in the second litter, and we also note that one consequence of the culling is that the result is invariably slightly better for sows discarded at higher age.

Both Tables show that the mortality in the first 3 weeks is lower in the first litter, and the litter sizes at 3 weeks are thus larger in relation to the number of pigs born than in subsequent litters. The absolute number of pigs born is also less in the first litter, however, and — as we have seen above — the mortality rate drops to a certain limit with decreasing litter size. In order to determine whether this lower mortality rate in the first litter may not be due only to the smaller litter size, the litter size, litter weight, and av. pig weight at 3 weeks of groups of litters with like numbers of pigs born but of different farrow orders have also been compared. All farrows in which 5, 9, and 13 pigs are born have been examined in this way (Table 18).

We find that in small litters the litter size at 3 weeks is practically independent of the order of the farrow, while the av. pig weight is distinctly lower in first litter. In litters of 9 pigs at birth, the litter size at 3 weeks is largest in the second and third farrows, and then gradually diminish, while in litters of 13 pigs born living the litter size at

Table 18.

Relation of the farrow order to sow performance (3 weeks old pigs) within groups of litters of the same size at birth.

Farrow order	Number of pigs farrowed											
	5				9				13			
	Fre- quency of farrowings	Litter size at 3 weeks	Av. weight at 3 weeks, kg		Fre- quency of farrowings	Litter size at 3 weeks	Av. weight at 3 weeks, kg		Fre- quency of farrowings	Litter size at 3 weeks	Av. weight at 3 weeks, kg	
			Lit- ters	Pigs			Lit- ters	Pigs			Lit- ters	Pigs
1	25	4.6	27.2	5.9	192	8.1	45.0	5.5	89	11.1	57.0	5.1
2	33	4.7	32.0	6.9	140	8.3	49.2	5.9	95	11.0	58.6	5.3
3	12	4.9	32.9	6.7	87	8.2	49.4	6.0	106	10.4	56.2	5.4
4	14	4.6	34.6	7.6	76	7.9	48.4	6.1	85	10.6	57.3	5.4
5	9	4.7	34.1	7.3	67	7.8	47.1	6.0	77	10.5	58.0	5.5
6	9	4.8	33.0	6.9	47	8.1	47.7	5.9	50	10.5	56.7	5.4
7	14	4.6	32.7	7.2	44	7.7	47.5	6.2	49	10.0	53.9	5.4
8	7	4.0	28.2	7.0	33	7.6	45.0	5.9	29	9.6	51.1	5.3
9	1	5.0	32.5	6.5	26	7.7	45.0	5.9	27	9.7	52.1	5.4
10	1	5.0	27.5	5.5	14	7.1	42.8	6.1	13	10.2	53.2	5.2
11	3	4.3	25.8	6.0	11	7.6	47.0	6.2	4	8.3	47.5	5.8
12	2	5.0	32.5	6.5	5	7.6	46.5	6.1	3	9.7	50.8	5.3
13	—	—	—	—	2	7.5	45.0	6.0	—	—	—	—
14	—	—	—	—	1	8.0	52.5	6.6	1	7.0	32.5	4.6
15	—	—	—	—	1	7.0	27.5	3.9	—	—	—	—
16	—	—	—	—	1	7.0	42.5	6.1	1	6.0	32.5	5.4

3 weeks is largest in the first two farrows and then gradually diminish. In these cases, too, the av. pig weight is slightly lower in the first litter.

The relation of farrow order to litter size at 3 weeks is illustrated in some detail by Fig. 8, which shows that this relation is practically linear in all the groups, and the equations of the linear regression lines have therefore been computed, and the curves plotted in the Figure. If the farrow order is  $x$ , and the litter sizes at 3 weeks in the groups of 5, 9, and 13 pigs born in each litter  $y_1$ ,  $y_2$  and  $y_3$  respectively, the corresponding regression equations will be

$$y_1 = 4.718 - 0.02014 x,$$

$$y_2 = 8.327 - 0.07937 x, \text{ and}$$

$$y_3 = 11.491 - 0.23051 x.$$

In order to see whether the differences in the coefficients of regression of the several groups,  $-0.02014$ ,  $-0.07937$ , and  $-0.23051$ , are significant, and whether the differences in the regression line gradients

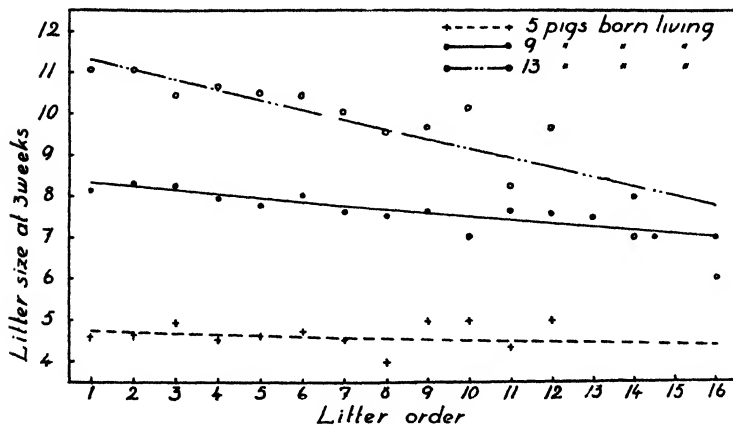


Fig. 8. Litter size at 3 weeks within groups of litters of equal size at birth, in litters of various order.

are thus larger than might be deemed only fortuitous, the intra-group regression and the corresponding residual square have first been determined by covariance analysis. The intra-group regression is  $-0.13058$  and the corresponding residual square 2 934.80 at 1 502 degrees of freedom. The sum totals of the residual squares for the several groups have also been computed. That sum is 2 864.93 at 1 500 degrees of freedom. The first of the above residual squares thus applies to the relation within the groups to the parallel lines of regression, while the latter sum refers to the lines of regression of the groups themselves. Table 19 shows the test of significance.

Table 19.

Differences between the coefficients of regression of litter size at 3 weeks on the farrow order, within groups of litters of 5, 9 and 13 pigs at birth.

Source of variance	D/f	Residual square	Mean residual square
Distribution of variates in relation to the parallel regression lines within groups.....	1502	2934.80	
Distribution of variates in relation to the line of regression for each group.....	1500	2864.93	1.910
Error = differences between the coefficients of regression of the groups .....	2	69.87	34.935

$$\text{Quotient } \frac{34.935}{1.910} = 18.29 \text{ (} P < 0.001 \text{)}$$



*Table 20.*

Relation of farrow order to the av. deviation of individual pig weights from the average in the litter at 3 weeks.

Litter order	Total pigs	Av. litter size at 3 weeks	Av. deviation of the individual pig weights from the average in the litter, kg	
			Actual	Corrected
1	4576	9.42	0.654	0.664
2	4883	10.04	0.724	0.718
3	4934	10.10	0.777	0.769
4	4733	9.86	0.814	0.813
5	4601	9.62	0.822	0.827

We thus see that the differences in the regression line gradients in the several groups are significant, and that higher farrow orders will accordingly affect the mortality more in large litters.

In the first 5 litters the relation of the farrow order to the deviation of the pigs from the average weights in the litter at 3 weeks has also been examined. This investigation covers the 517 sows in respect of which full particulars on the weight of the pigs at 3 weeks were available. Litters in which only one pig was left at 3 weeks have been excluded. Table 20 shows that the average deviation is least in the first farrow and increases in each subsequent farrow. As we have already seen that these variations in the pigs increase with the litter size, the Table also gives the average size of the litters to which the pigs belong. In the first farrow, for instance the pigs on an average belonged to litters of 9.42 pigs. Note that this figure is not the average size of the litter, which is considerably lower. With the aid of the previously found equation for the regression of the deviation in relation to the size of the litter ( $y = 0.503 + 0.026 x$ ), the deviations in the several groups have then been corrected to the average size of the litters to which the pigs belonged, viz. 9.82 pigs per litter, and the resultant values have been entered in the Table.

These corrected values of the deviation of the pigs from the average weight in the litter clearly show that the farrow order affects the evenness of the pigs in the litter. The pigs are more even in early than in later litters. The rectilinear correlation computed for litters with the same number of pigs at 3 weeks is  $+0.094$  ( $P < 0.001$ ), and the corresponding regression of the deviation of the pigs on the farrow order is  $0.042$ . The relation is evidently not linear, however, but rather corresponds to the curve expressed by the equation:

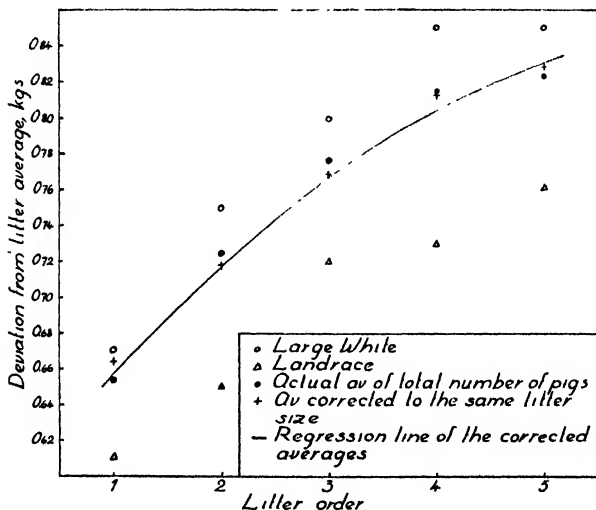


Fig. 9. The deviation in the weight of individual pigs at 3 weeks from the average weight of the litter, within groups of litters of various order.

$$y = 0.584 + 0.078 x - 0.0057 x^2$$

where  $x$  = the farrow order and  $y$  = the deviation (in kg) of the individual pig from the average weight in the litter at 3 weeks.

Fig. 9 also shows the relation of the farrow order to the deviation of the pigs from the average weight in the litter at 3 weeks. Besides the abovementioned values, the herd averages of the Landrace and Large White breeds have also been entered separately in the figure. It will be seen that the pigs have deviated less from the average weight in herds of the Landrace breed. As will be shown later (see Table 27), however, this difference cannot with any satisfactory degree of probability be referred to a racial difference, but may be due to other causes. The influence on the deviation of the farrow order is anyway similar in the two breeds.

All the sows for which data of the first 5 farrows are available have in addition been subjected to a special analysis of variance in order to determine whether the influence of the farrow order on the properties examined is significant or not, and to ascertain what importance should be ascribed to it. For that purpose, the variations in the intervals between the respective farrows have been studied in addition to the variations in the number of pigs at birth, the litter size, litter weight, and the deviations from the average pig weights at 3 weeks in the

Table 21.

Variance in performance of sows grouped by farrow order.

Source of variance	D/f	Litter size at birth			Litter size at 3 weeks		
		Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance	Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance
Differences between farrow orders.....	3	171.123 <sup>1</sup>	0.286	3.90	59.833 <sup>1</sup>	0.094	1.58
Differences within farrows of the same order.....	2288	7.046	7.046	96.10	5.864	5.864	98.42
Total variance.....	2291	7.261	7.332	100	5.935	5.958	100

Source of variance	D/f	Weight of litter at 3 weeks, kg			Farrowing interval, days		
		Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance	Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance
Differences between farrow orders.....	3	4508.8 <sup>1</sup>	7.5	3.64	2350.3 <sup>4</sup>	1.4	0.09
Differences within farrows of the same order.....	2288	198.3	198.3	96.36	1522.5	1522.5	99.91
Total variance.....	2291	203.9	205.8	100	1523.6	1523.9	100

Source of variance	D/f	Av. deviation of individual pig weights from the average in the litter, kg		
		Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance
Differences between farrow orders.....	4	22.5550 <sup>1</sup>	0.0037	0.94
Differences within farrows of the same order.....	23722	0.3907	0.3907	99.06
Total variance.....	23726	0.3944	0.3944	100

litter. The analysis covers the results of the first 4 farrows, except as regards the deviations of the pigs from the average weight, where the first 5 farrows are included (Table 21).

The parts in per cent of the total variance ( $\sigma^2$ ) have been computed by the formula:

$$\sigma_b^2 = \frac{\text{mean square between groups} - \text{mean square within groups}}{\text{number of variates in the groups}}$$

care being taken that the number of litters in all the groups is equal, or practically equal.

The farrow order proved to have relatively most influence on the number of pigs born; next in importance being litter size and litter weight at 3 weeks. Its influence on the deviation of the pigs from the average weight in the litter is relatively smaller. Its effect on the length of the intervals between farrows is not significant. These intervals averaged 192, 186, 189, and 189 days after the first, second, third, and fourth farrows respectively.

### The season of farrowing.

The distribution of the farrows on different months of the year depends rather much on the date of the first farrow. A seasonal variation in the age of the sows at the first farrow might also be expected. In investigating the influence of the farrowing month on the performance, it may therefore be of interest first to examine the conditions at the first farrow. This has been done in Table 22 for both breeds combined.

Table 22.

Age and first-farrow performance in different seasons.

Month of farrowing	Number of litters	Litter size at		Mortality rate, %	Av. weight at 3 weeks, kg		Age at first farrowing, months
		birth	3 weeks		Litters	Pigs	
I	86	9.61	8.12	15.50	43.66	5.38	14.8
II	63	9.99	8.29	17.00	43.45	5.24	14.7
III	125	10.39	8.99	13.47	47.98	5.34	15.1
IV	173	9.69	8.52	12.07	47.53	5.58	14.6
V	167	9.59	8.44	11.99	46.06	5.46	14.4
VI	110	9.99	8.88	11.11	49.55	5.58	14.4
VII	99	9.30	8.18	12.04	46.19	5.65	14.2
VIII	120	9.87	8.89	9.93	47.79	5.38	14.0
IX	84	9.85	8.66	12.08	46.49	5.37	14.3
X	142	9.80	8.68	11.43	45.74	5.27	14.1
XI	112	9.63	8.51	11.63	46.25	5.44	14.4
XII	84	10.04	8.53	15.04	45.06	5.28	14.7
Total and av.	1361	9.81	8.56	12.78	46.31	5.41	14.5

Table 23.

Variance in sow performance in first farrows at different seasons.

! variance	D/t	Mean square			
		Litter size at		Litter weight at 3 weeks, kg	Age at first farrowing, months
		birth	3 weeks		
Between breeds .....	1	384.000 <sup>1</sup>	352.000 <sup>1</sup>	13100 <sup>1</sup>	296.000 <sup>1</sup>
Within breeds:					
Between months .....	22	7.773 <sup>4</sup>	7.409 <sup>4</sup>	300 <sup>3</sup>	13.545 <sup>1</sup>
Within months .....	1341	5.944	5.457	177	5.130
Total variance .....	1364	6.251	5.743	188	5.479

This Table shows that the relatively largest number of sows have farrowed in April–May, and the smallest in December–February. The sows farrowing for the first time in the winter months moreover seem to have been slightly older than these farrowing in the summer, even though the differences are relatively small.

The litter weight at 3 weeks appear to be highest in farrows taking place in the spring and lowest in the winter months, December–February. In order to see whether these inter-monthly differences are significant, the inter- and intra-monthly variance is presented in Table 23. This shows that the influence of the month is significant only in respect of the age of the first farrow and the litter weight at 3 weeks. Differences in the number of pigs born in each litter and the litter size at 3 weeks may on the other hand well be merely fortuitous.

The differences in litter weights in the different months cannot be attributed to differences in the age of the sows, for usually higher ages when farrowing are accompanied by higher litter weights, while conditions in this case are opposite. On the basis of the previously found regression in litter weights in relation to age at the first farrow, which according to Table 12 is 0.919, and average litter weight of 46.490 kg, and an average age at the first farrow of 14.467 months, the formula of litter weight regression will be  $y = 33.195 + 0.919 x$ , where  $x$  = the age in months and  $y$  = the litter weight. The litter weights in the different months have then been corrected to the same age of the sows with the aid of this formula. The breeds are not differentiated in this computation, seeing that their distribution of litters on the different months is fairly similar, and racial differences can thus have no appreciable effect on the comparison. The following figures give the result:

Month	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Litter weight at 3 weeks, in kg . . .	43.3	43.2	47.4	47.3	46.1	49.6	46.4	48.3	46.7	46.1	46.2	44.8

After this correction it is still more evident that litters born in December–February weight less than other litters.

The seasonal influence on the performance in subsequent farrows, irrespective of their order, has been checked by examining the conditions in all farrows of orders from 3 to 7. As, within these limits, the farrow order and the age of the sow have but little effect on the production results, and as moreover the farrows are fairly evenly spread over the months in relation to the age of the sows, any differences in age have been disregarded. Breed and herd differences, however, might make themselves felt in this case, too, and the examination has therefore been made within breeds as well as within herds. The result of the examination is shown in Table 24.

The number of pigs born in each litter varies but slightly from one month to another, but seems a little larger in the spring than in the autumn and winter. The mortality in the first 3 weeks is apparently somewhat higher in farrows taking place in the winter months proper

*Table 24.*

Sow performance at third-seventh farrows.

Month of farrowing	Frequency of farrows	Litter size at		Mortality rate, %	Av. weight at 3 weeks, kg	
		birth	3 weeks		Litters	Pigs
I	270	10.96	8.85	19.25	54.40	6.15
II	268	11.07	9.01	18.61	55.40	6.15
III	275	11.31	9.26	18.13	58.60	6.33
IV	228	11.34	9.56	15.70	59.40	6.21
V	319	11.16	9.34	16.31	58.15	6.23
VI	233	11.51	9.44	17.98	59.70	6.32
VII	289	11.18	9.18	17.89	59.40	6.47
VIII	288	10.83	8.97	17.17	56.75	6.33
IX	236	11.09	9.17	17.31	58.00	6.33
X	236	10.90	8.96	17.80	54.25	6.06
XI	259	10.78	8.63	19.94	53.00	6.14
XII	245	10.93	8.94	18.21	55.05	6.16
Total and av.	3146	11.09	9.11	17.85	56.85	6.24

Table 25.

Variance in sow performance at third-seventh farrows in different seasons.

Source of variance	D/f	Litter size at						Litter weight at 3 weeks		
		birth			3 weeks					
		Mean square	Calculated $\sigma^2$	Per cent of variance	Mean square	Calculated $\sigma^2$	Per cent of variance	Mean square	Calculated $\sigma^2$	Per cent of variance
Differences between herds .....	7	159.714 <sup>1</sup>	0.384	5.11	66.714 <sup>1</sup>	0.152	2.69	3057.95 <sup>1</sup>	6.889	3.47
Within herds:										
Between months	88	8.818 <sup>4</sup>	0.053	0.70	7.068 <sup>3</sup>	0.050	0.89	348.70 <sup>1</sup>	4.945	2.49
Between farrows within months	3050	7.084	7.084	94.19	5.445	5.445	96.42	186.65	186.650	94.04
Total variance.....	3145	7.472	7.521	100	5.627	5.647	100	199.52	198.484	100

than at other times. The litters apparently also weigh less if born in late autumn or winter, and the same generally applies also to the individual pigs.

To ascertain whether these differences are significant, and thus cannot be deemed fortuitous, the variations in the monthly averages have been analysed (Table 25). The differences in litter weights proved highly significant, and in the differences in litter sizes at 3 weeks  $P$  was also  $< 0.05$ , but slightly over 0.05 in respect of the number of pigs born. As the degrees of freedom are equal in these cases, the part of the total variation due to inter-monthly differences in litter weights is largest, or 1.49 %, in litter size at 3 weeks 0.89 %, and in the number of pigs at birth 0.70 %.

Diagrams have finally also been plotted showing for each month the average number of pigs born in each litter, the average mortality in the first 3 weeks, and the litter weight at 3 weeks (Fig. 10). As the distribution among both breeds is fairly equal in the months of the year, these are taken together.

### Genetic variation.

Differences in the sows' performance may be due to environmental or genetic causes. The differences in the several farrows of the same sow are due partly to changed environment, and partly to changes

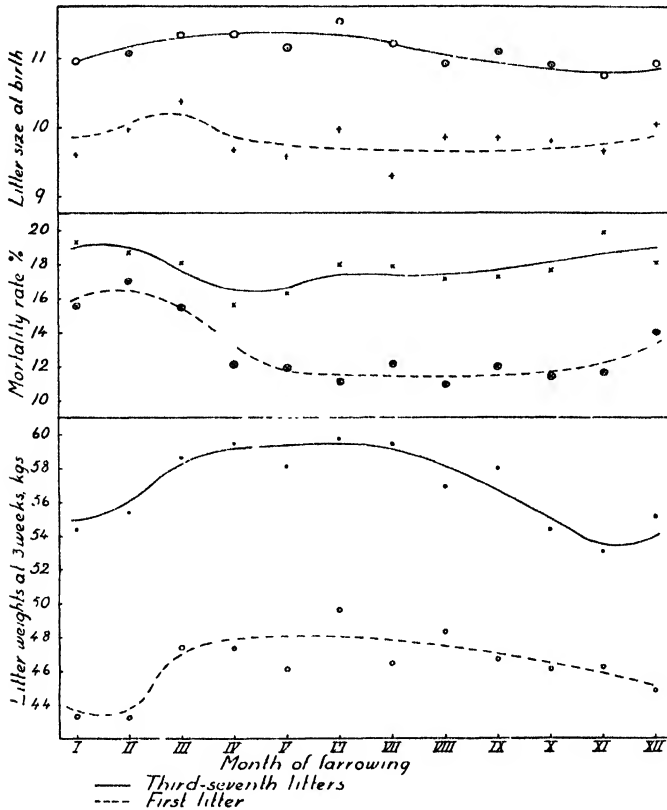


Fig. 10. Litter size at birth, pig mortality, and litter weight at 3 weeks, in relation to the season of farrowing.

conditioned by the increasing age of the sow. The total variation in for instance litter sizes at birth may thus be divided into the following three essentially different parts, including interaction effects:

1. Variation due to different environments.
2. Variation due to inherent tendencies of the sow herself to changes in her performance from one farrow to another.
3. Variation due to genetic differences between the sows.

Variations under 1 and 2, and of those under 3, that which is due to differences in the number of teats, which must be deemed mainly genetic (NACHTSHEIM 1924, PLUM 1938, etc.), have been dealt with in the preceding section. The variation due to undefined genetic differences is dealt with in this section.



*Table 26.*  
Causes of variance in sow performance.

Source of variance	D/f	Litter size at birth			Litter size at 3 weeks			Litter weight at 3 weeks			Farrowing interval		
		Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance	Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance	Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance	Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance
Between breeds	1	588.660 <sup>2</sup>	0.464	6.15	219.380 <sup>4</sup>	0.145	2.41	6654.0 <sup>4</sup>	4.535	2.19	1826 <sup>4</sup>	0.000	0.00
Between herds	6	56.677 <sup>1</sup>	0.156	2.07	53.663 <sup>1</sup>	0.152	2.52	1457.3 <sup>3</sup>	3.119	1.51	4782 <sup>4</sup>	3.682	0.24
Between birth-year groups	111	12.028 <sup>4</sup>	0.097	1.29	10.253 <sup>3</sup>	0.137	2.27	563.6 <sup>1</sup>	15.415	7.46	3727 <sup>1</sup>	110.901	7.21
Between sires													
of sows . . .	158	10.154 <sup>4</sup>	0.214	2.84	7.565 <sup>4</sup>	0.178	2.95	266.7 <sup>4</sup>	4.447	2.15	1591 <sup>4</sup>	0.000	0.00
Between sows	296	8.381 <sup>1</sup>	0.631	8.36	6.092 <sup>2</sup>	0.226	3.75	229.9 <sup>2</sup>	16.900	8.18	1695 <sup>2</sup>	90.250	5.86
Within sows	1719	5.983	5.983	79.30	5.188	5.188	86.10	162.3	162.311	78.51	1334	1334.231	86.69
Total variance	2291	7.261	7.545	100	5.935	6.025	100	203.9	206.727	100	1524	1539.064	100

### Intra- and inter-sow variations.

#### *Analysis of variance.*

To obtain a picture of the importance of heredity to sow performance, the number of pigs at birth, the litter size and litter weight at 3 weeks, and the interval between farrows, have been analysed for the 573 sows in respect of which full particulars of the first 5 farrows are available (Table 26). This analysis includes the first 4 farrows and the subsequent interval. The variance between breeds has first been computed, and then the variance between herds, within breeds. As has already been pointed out, differences in birth-year distinctly influence sow performance, and that part of the variance has consequently also been computed. The variance due to differences in sires of sows and to differences in sows by the same sire have finally been computed within herds and birth-year groups.

The variation in the deviation of the pigs from the average weight in the litter has also been analysed in substantially the same way (Table 27). This analysis covers the results of the first 5 farrows, but as particulars of individual pig weights are not available for all the sows, this analysis only covers 517 sows. Possible variance due to different years of birth of the sows have been disregarded. In some respects, the results of this analysis are not quite comparable with the results given in Table 26. In this case the total variance only refers to the deviations of individual pigs from the average weight in the

*Table 27.*

Causes of variance in the deviation of individual pig weights from the litter averages.

Source of variance	D/t	Deviation of individual pig weights from the litter average at 3 weeks			
		Mean square	Calculated variance $\sigma^2$	Per cent of total variance	Per cent of total variance between litters
Between breeds.....	1	39.3800 <sup>4</sup>	0.0023	0.58	5.20
Between herds .....	6	12.0583 <sup>1</sup>	0.0036	0.91	8.16
Between sires of sows .....	141	1.4803 <sup>1</sup>	0.0044	1.11	9.95
Between sows .....	368	0.7763 <sup>2</sup>	0.0030	0.76	6.79
Between litters .....	2036	0.6398 <sup>1</sup>	0.0309	7.80	69.91
Within litters .....	21174	0.3522	0.3522	88.85	—
Total variance .....	23726	0.3944	0.3964	100	—

*Table 28.*

Comparison of the performance of Large White and Landrace sows in their first-fourth farrowings.

Breed	Litter size at		Mortality rate, %	Av. weight at 3 weeks, kg		Av. deviation of individual pig weights from litter average, kg	Farrowing interval
	birth	3 weeks		Litters	Pigs		
Large White . . . . .	11.01	9.36	15.26	52.83	5.64	0.77	188.65
Landrace . . . . .	9.90	8.66	12.53	48.98	5.66	0.68	190.55

litter, while in the other analyses the total variance refers to characteristics of the whole litters. For this reason, the several parts of the variance are also computed in per cent of the inter-litter variance.

#### *Breed differences.*

As to the differences between the Large White and the Landrace breeds, the analysis of the variation in Table 26 shows that the difference between the two breeds is only significant in respect of the number of pigs born in each litter. In the part of our material included in this analysis, the average of the Large White breed is 11.94 and of the Landrace 9.90, while the corresponding figures for all the sows, whose results are available for the whole of their production period, are 10.79 and 9.76 respectively. The litter size and weight at 3 weeks, are slightly larger in the Large White than in the Landrace, but it is impossible — chiefly on account of the small number of herds covered by the investigation — to say whether these differences are due only to differences between the individual herds or indicate an actual difference between the breeds. In any case, our analysis does not indicate that these inter-breed differences are significant. The same applies to the deviations of individual pigs from the average weight in the litter. But the fact that these are greater in herds of Large Whites does not permit the conclusion that the two breeds generally differ in that respect.

Table 28, which gives some particulars of the first 4 farrows of the sows of each breed, also shows that the pig weights at 3 weeks are equal in both, while the mortality in the first 3 weeks is slightly lower for the Landrace breed. But at least the greater part of this difference in the mortality rate is probably due to the smaller litter size of the Landrace breed. If the mortality rates of each breed are computed

Table 29.

Herd averages of sow performance in the first 4 farrows.

Herd	Number of sows	Litter size at		Av. weight at 3 weeks, kg		Av. deviation of individual pig weights from the average in the litter at 3 weeks	Mortality rate, %	Farrowing interval
		birth	3 weeks	Litters	Pigs			
Bjarka-Säby (Large White)	42	11.25	10.01	55.68	5.56	0.81	11.01	189.07
Bollerup ( » )	89	10.31	8.63	53.48	6.20	0.85	16.30	186.71
Bondessons ( » )	205	11.26	9.53	51.35	5.39	0.76	15.37	191.54
Högby ( » )	20	11.11	8.94	55.39	6.20	0.75	19.57	190.25
Övrabyborg ( » )	63	11.21	9.53	54.00	5.67	0.73	15.04	181.21
Assmåsa (Landrace) . . .	83	9.69	8.54	46.80	5.48	0.62	11.92	191.96
Blombacka ( » ) . . . .	48	9.81	8.87	49.99	5.64	0.78	9.61	185.76
Killegården ( » ) . . . .	24	10.79	8.67	54.41	6.28	0.68	19.69	195.29

on the basis of the previously found relation of the number of pigs at birth to the litter sizes at 3 weeks ( $y = 2.824 + 1.633x - 0.0475x^2$ , where  $x$  = the number of pigs born in each litter and  $y$  = litter size at 3 weeks), we find that the breed difference in the mortality should be 2.42, whereas the value obtained is 2.73. In this connexion we might also mention that in the examined material the average number of teats is 13.73 in the Landrace, and 13.67 in the Large Whites, and that in judging the result hardly any significance can accordingly be ascribed to this factor.

The difference between the two breeds in the length of the farrow interval is apparently not at all significant.

#### *Herd differences.*

The inter-herd differences in the number of pigs at birth and in litter size at 3 weeks, as well as in litter weight and the deviation of individual pigs from the average weight in the litter at 3 weeks, are significant. The herd averages of the most important characteristics examined are given in Table 29 for the first 4 farrows.

The inter-herd differences seem in both breeds to have relatively most effect on the litter size at 3 weeks, which accounts for 2.52 % of the total variance. The number of pigs born in each litter and the litter weight at 3 weeks are also apparently affected in the same relative degree. The percentage of the former of the total variance is 2.08, and of the latter 1.51. The mortality in the first 3 weeks is thus obviously what varies the most, and the variation in litter size at 3 weeks

is due to just that variation in pig mortality. (The inter-breed correlation of the herd averages of these two characteristics is  $-0.474$ .) There is good reason to assume these significant inter-herd differences to be very largely due to differences in environment, but hereditary variation in the herds probably also contribute to this. In this respect the variance due to genetic causes cannot be differentiated from that due to environment. There is no significant inter-herd difference whatever in the length of the interval between farrows in the two breeds.

#### *Differences between the sires of the sows.*

After deduction of variance due to birth-year differences, the differences in the group averages of sows born in the same years by different sires are not significant in respect of any of the production characters examined, and it is accordingly not possible definitely to prove that differences between contemporary boars in the herds have affected the results. In view of the positive parts of the variance, however, differences between the sires of the sows might possibly to some extent have affected not only the number of pigs born in each litter, but also the litter size and litter weight at 3 weeks, although the degrees of freedom are too small to give significance to variances of this order of magnitude, while it seems perfectly clear that inter-sire differences have not affected the length of the interval between farrows. The analysis of the deviation of the pigs from the average weight in the litter indicates that the part of the variance due to inter-sire differences is significant, but it should be noted that in this no account was taken of differences due to different birth-years of the sows, and part of this variance may accordingly be due to such differences.

#### *Differences between half-sisters.*

The variance due to differences between sows born in the same year by the same sire is significant to all the characters investigated. These differences seem to have most effect on the numbers of pigs born in each litter and the litter weight at 3 weeks, while their effect on the length of the farrowing interval and litter size at 3 weeks is not equally pronounced. This is also apparent from the percentages of the total variance in the respective characteristics that are produced by differences between half-sisters. For the number of pigs born in each litter this share is 8.36 %, while for litter size at 3 weeks it is 3.75 %, for litter weight at 3 weeks 8.18 %, and for the interval between

farrows 5.86 %. The share of the deviation of individual pigs from the average weight in the litter is only 0.76 %, but will become of the same order of magnitude as the others if the inter-litter variance is also taken into account, as the variance due to differences in sows by the same sire is 6.79 % of the total inter-litter variance.

*Intra-sow correlation.*

This correlation is a measure of the degree to which the characteristics studied are repeated in the same individual, and thus indicates how far they may be regarded as individually conditioned. It is therefore of importance to determine it. As in computing the different variances ( $\sigma^2$ ), there are several methods of doing this. In a hierarchic classification, however, the general rule may be said to be that an intra-class correlation is  $\sigma_b^2$  for the class in question to  $\sigma_w^2$  for the next class above. In this case, intra-sow correlation within age groups might be considered the best measure of sow individuality. If  $\sigma^2$  within sows is designated A,  $\sigma^2$  between sows within sires B, and  $\sigma^2$  between sires of the sows C,  $\frac{B + C}{A + B + C}$  will express this repetition or correlation of different litters of the same sow. Calculated in this way, the correlation of sow performances to the numbers of pigs at birth will be 0.124, to litter size at 3 weeks 0.072, to litter weight at 3 weeks 0.116, and to the interval between farrows 0.078. Calculated by the often used formula

$$\frac{\text{total mean square} - \text{mean square within sows}}{\text{total mean square}},$$

the corresponding figures will be 0.114 ( $P < 0.001$ ), 0.054 ( $P < 0.01$ ), 0.094 ( $P < 0.001$ ), and 0.048 ( $P < 0.01$ ). Similarly, the intra-sow correlation of the deviation of the individual pigs from the average weight in the litter will be 0.020 and 0.032 ( $P < 0.001$ ). As the intra-sow correlation within herds equals the sum of the variance between sires of the sows and between sows within sires divided by that sum plus the variance within sows, that correlation has also been calculated without taking the intra-litter variation into account. Calculated in this way, this correlation will according to Table 27 be

$$\frac{0.0044 + 0.0030}{0.0309 + 0.0044 + 0.0030} = 0.193,$$

which thus gives the intra-sow correlation of the aggregate deviation of the pigs from the average litter weight.

### The dam-daughter correlation.

The correlation of dams to daughters is a measure of how far a given character of the individual may be considered genetically determined. But this measure will give a fairly correct picture of the part played by inheritance only if at least the greater part of this dam-daughter correlation, which is due to the environments of mothers and daughters having been more similar than the average environment of other animals, has been eliminated. Account should also be taken of the possibility of selective breeding, i. e. that the uniformity of the sows and boars mated has been greater than the average uniformity of all the sows and boars, but this hardly seems to be the case in the material covered by our investigation. It is, however, quite clear that the environments of dams and their respective daughters have been more uniform than the average of all the sows.

The most important of the characteristics in respect of which the dam-daughter correlation has been computed are the number of pigs born living, and the litter size and weight at 3 weeks. These are computed for the actual numbers and the actual weights. To avoid any influence on the result of the common dam-daughter environment, all these correlations have been computed within herds.

We have already seen, however, that in certain characteristics there is variation due to the differences in birth-year of the sows, and particularly in the litter weight at 3 weeks, but to some extent also in the litter size at 3 weeks. The differences in the averages for years close together may be observed to be smaller than when the years are farther apart. The fact that the productive periods of a given dam and her daughters as a rule lie relatively close together in time may therefore be expected to produce a correlation of dams to daughters. With a view to eliminating also the effect that this may have on the dam-daughter correlation, we have also computed the production results of both dams and daughters as deviations from the whole herd averages in the same year. These deviations are calculated as differences between the farrowing results of the sow in question and the average results of all the farrows in the herd in the same year, wherefore the deviations of the dams have been compared with those of her daughters.

Finally the dam-daughter correlation in respect of the average deviations of the individual pigs in each litter from the average weight in the litter at 3 weeks has also been computed within herds.

All these dam-daughter correlations are computed separately for

*Table 30.*  
Dam-daughter correlations: number of pigs at birth and at 3 weeks.

Farrow order	Litter size at birth			Litter size at 3 weeks		
	Within herds		Deviations from the herd average of the corresponding year	Within herds		Deviations from the herd average of the corresponding year
	Coefficient of		Coefficient of	Coefficient of		Coefficient of
	D/f	correlation	regression	D/f	correlation	regression
First farrow .....	308	-0.042 <sup>4</sup>	-0.026	315	-0.006 <sup>4</sup>	-0.005
Second " .....	308	0.114 <sup>3</sup>	0.111	315	0.058 <sup>4</sup>	0.059
Third " .....	308	-0.026 <sup>4</sup>	-0.024	315	0.062 <sup>4</sup>	0.006
Fourth " .....	308	0.020 <sup>4</sup>	0.020	315	-0.022 <sup>4</sup>	-0.022
Within farrow: first-fourth ..	1224	0.018 <sup>4</sup>	0.016	1260	0.024 <sup>4</sup>	0.022
Total in first four farrows....	308	0.028 <sup>4</sup>	0.028	315	-0.022 <sup>4</sup>	-0.021
				308	0.137 <sup>3</sup>	0.133
				315	0.023 <sup>4</sup>	0.020
				308	0.136 <sup>3</sup>	0.137
				308	0.066 <sup>4</sup>	0.069
				308	0.072 <sup>4</sup>	0.067
				1224	0.072 <sup>3</sup>	0.069
				308	0.026 <sup>4</sup>	0.016
				315	0.080 <sup>4</sup>	0.082
				315	-0.095 <sup>4</sup>	-0.012
				315	0.053 <sup>4</sup>	0.013
				1260	0.017 <sup>4</sup>	0.017
				315	0.037 <sup>4</sup>	0.036



Table 31.

Dam-daughter correlations: litter weight at 3 weeks and av. deviation of individual pig weights from average in the litters.

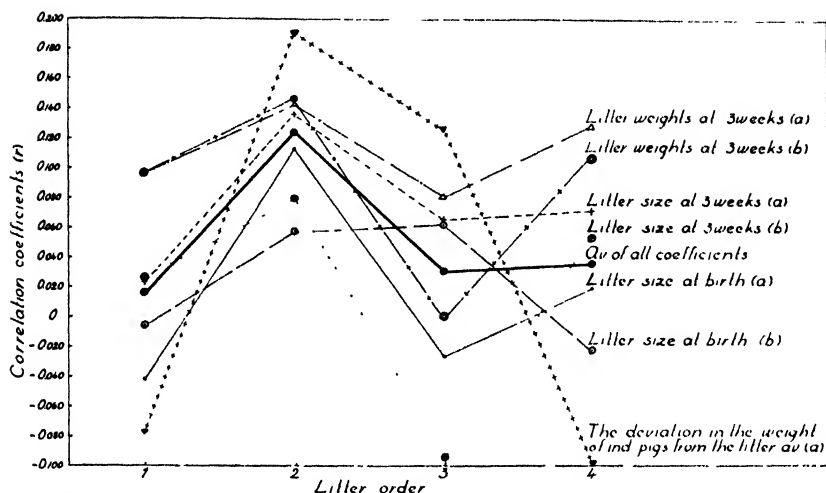
Farrow order	Litter weight at 3 weeks						Av. deviation of individual pig weights from average in the litters (within herds)		
	Within herds			Deviation from the herd average on the corresponding year					
	D/f	Coefficients of		D/f	Coefficients of		D/f	Coefficients of	
		correlation	regression		correlation	regression		correlation	regression
First litter ..	308	0.097 <sup>4</sup>	0.092	315	0.097 <sup>4</sup>	0.095	220	—0.077 <sup>4</sup>	—0.007
Second » ..	308	0.143 <sup>3</sup>	0.142	315	0.145 <sup>3</sup>	0.159	220	0.190 <sup>3</sup>	0.200
Third » ..	308	0.081 <sup>4</sup>	0.096	315	—0.000 <sup>4</sup>	—0.000	220	0.128 <sup>4</sup>	0.138
Fourth » ..	308	0.129 <sup>3</sup>	0.137	315	0.107 <sup>4</sup>	0.120	220	—0.099 <sup>4</sup>	—0.100
Within litters:									
first-fourth ...	1224	0.112 <sup>1</sup>	0.116	1260	0.089 <sup>2</sup>	0.093	880	0.024 <sup>4</sup>	0.025
Total first									
four litter ....	308	0.230 <sup>1</sup>	0.248	315	0.109 <sup>4</sup>	0.120	22	0.169 <sup>3</sup>	0.186

each of the first 4 farrows, as averages of these, and for their aggregate results. The comparison can therefore only include sows in respect of which full particulars of the character investigated are available from farrows Nos. 1-4.

The results of this investigation are given in Tables 30 and 31.

The dam-daughter correlation is very slight with regard to the litter size at birth. It is significant ( $P < 0.05$ ) only to the actual number of pigs in litters of farrow No. 2, while in all other comparisons the coefficients of correlation do not differ significantly from nil. No marked difference in the results can be observed, whether the actual number of pigs or their deviations from the herd averages have been examined.

The figures giving the dam-daughter correlation with the number of pigs at 3 weeks indicate that the coefficients of correlation are always slightly larger when the calculation is based on actual numbers than when it is based on deviations from herd averages. The higher coefficients of correlation in the former case are obviously due — at least partly — to the dams' and their daughters' living in more uniform environments than the average sows in the herd. This may be assumed to affect particularly the coefficient of correlation to the total production in farrows Nos. 1-4. Neither do the other coefficients of correlation differ significantly from nil if computed on the basis of the



The coefficients are calculated: (a) within herds, (b) on the deviation of the individual litters from the herd av. for the corresponding year.

Fig. 11. Dam-daughter correlations of litter size and weight, based on the first, second, third and fourth litters respectively.

deviations from the herd averages, but their values are nevertheless positive except with respect to the third farrow.

The dam-daughter correlation with litter weight at 3 weeks is much stronger than that with litter size. But in this case too --- especially when the correlation is computed on the basis of the total weight of litters Nos. 1-4 --- the coefficient of correlation is larger when the basis of calculation is the actual weight than when it is the deviations from herd averages, which is probably due to the abovementioned circumstance that dams and their daughters live in more similar environments than the average sows. In this case the correlations dams to daughters are significant in the 2nd farrow and in the averages of farrows Nos. 1-4 ( $P < 0.01$ ), however, even when the calculation is based on deviations from herd averages.

The dam-daughter correlations in respect of the deviation of individual pigs from the average weight in the litter are significant to the 2nd farrow ( $P < 0.01$ ) and to the aggregate result of farrows Nos. 1-4 ( $P < 0.05$ ).

Tables 30 and 31 also show that the correlation of dams to daughters is always most marked when computed for the results of 2nd farrows. In most cases the correlation is even more pronounced than that calculated on the basis of the aggregate results of farrows Nos. 1-4. To illustrate this, the results have been collated in Fig. 11. In this figure the coefficients of correlation of all the characters examined on

the basis of the results of each of the farrows Nos. 1-4 have been marked. The arithmetic means of all the 7 coefficients of correlation, separately for each farrow number, are in addition marked in the figure. Too far-reaching conclusions must not be drawn from these results, but it can hardly be denied that it looks as if the results of the 2nd farrow express the hereditary tendencies of the material examined better than the results of the other farrows. The weakness of the dam-daughter correlation computed from the results of first farrows is, however, obviously due to the facts that the age at the first farrow affects the result so much, and that the age of the daughter at her first farrow often differs greatly from the age of the dam at her first farrow. The dam-daughter correlation in respect of age at the first farrow, calculated for the 217 pairs included in our investigation, is only 0.147. On the other hand it seems probable that the results of the first farrow will express the hereditary of the sow better if for instance full sisters are compared. The full-sister correlation of sow ages at first farrows, calculated from 196 pairs of full-sisters, is 0.247.

## Discussion.

### General survey.

The material includes in all 1 168 sows for which data are available throughout their productive periods; their aggregate number of farrows is 5 486. The average number of pigs born living in each litter of the whole material is 10.53, the average number of live pigs at 3 weeks 8.67, and the average litter weights at 3 weeks 48.59 kg. Complete particulars are available from the first 5 farrows of 573 sows, and the corresponding averages of that part of the material is 10.74 ( $\sigma = 2.695$ ), 9.17 ( $\sigma = 2.436$ ), and 51.79 ( $\sigma = 14.279$ ). The average interval between farrows is 189.2 ( $\sigma = 39.033$ ) days.

The most important causes of variation in the numbers of pigs born in each litter, litter sizes and litter weights at 3 weeks, and length of interval between farrows, are given in Table 32.

Note that the percentages given in this Table do not total 100, which is due to the variance caused by the differing years of birth of the sows within herds being also included in the variance in the years of birth of the sows mentioned in Point 1; to the variances resulting from different numbers of pigs born and different numbers of pigs at 3 weeks being computed without taking into account any other variations, and some of these variances are thus forming part of several

Table 32.

General survey of the causes of variance in sow performance.

Source of variance	Per cent of total variance			
	Litter size at birth	3 weeks	Litter weight at 3 weeks	Farrowing interval
1. Birth year of the sows (total).....	0.8	0.8	3.2	2.1
2. Birth year of the sows (within herds)...	1.3	2.3	7.5	7.2
3. Litter size at birth .....	—	52.6	24.9	—
4. Litter size at 3 weeks .....	—	—	55.1	—
5. Number of teats in the sows .....	—	0.2	1.1	—
6. Farrow orders .....	3.9	1.6	3.6	0.1
7. Month of farrowing (within herds) ....	0.7	0.9	2.5	—
8. Breed .....	6.2	2.4	2.2	0.0
9. Herd (within breeds) .....	2.1	2.5	1.5	0.2
10. Differences between sires of sows (within birth year groups and herds) .....	2.8	3.0	2.2	0.0
11. Differences between paternal half sisters (within birth year groups and herds) ..	8.4	3.8	8.2	5.9
12. Differences between litters of the same sow (including variation due to age and season) .....	75.3	84.3	74.9	86.6

others; and to parts of the variance, produced by varying months of farrows being also for the same reason included in other variances.

As indicated by Table 32, the number of pigs at birth, the litter size at 3 weeks, and the litter weight at 3 weeks, are all rather strongly correlated inter se. For instance, 52.6 % of the total variance in litter size at 3 weeks, and 24.9 % of the total variance in litter weight at 3 weeks, are due to differences in the number of pigs born in each litter, and 55.1 % of the total variance in litter weights at 3 weeks to differences in litter sizes at 3 weeks. Assuming linear correlations, the corresponding coefficients of correlation are as follows:

Numbers of pigs born in each litter — litter sizes at 3 weeks,  $r = 0.669$  ( $P < 0.001$ )

Numbers of pigs born in each litter — litter weights at 3 weeks,  $r = 0.445$  ( $P < 0.001$ )

Litter sizes at 3 weeks — litter weights at 3 weeks,  $r = 0.686$  ( $P < 0.001$ ).

AXELSSON (1928) found the coefficients of correlation of numbers of pigs at birth to litter sizes at 3 weeks to be  $0.6765 \pm 0.0115$  (Large

White), and  $0.7085 \pm 0.0251$  (Landrace), whilst his coefficients for the relation of litter sizes at 3 weeks to litter weights at 3 weeks were  $0.8163 \pm 0.0071$  and  $0.7220 \pm 0.0241$  respectively.

Our investigation, however, proves that — actually — these relations are not linear. In relation to the number of pigs born, the number of live pigs at 3 weeks will at first increase; that increase will gradually diminish as the number of pigs born increases. The maximum number of pigs at 3 weeks will be obtained when the number of pigs born in each litter is 16–17. The mortality rate is lowest in litters of about 7 pigs born, but rises gradually for both higher and lower numbers. A comparison with earlier investigations shows that their results have on the whole been similar. JOHANSSON (1929 a) found the maximum litter size at 3 weeks when the number of pigs born living was about 15; OLSEN (1939) found that the largest litters at 8 weeks were produced by litters of 16 pigs born living, and OLBRYCHT (1943) made the corresponding number 17, while MENZIES-KITCHIN (1937) found the largest litters at 6 weeks when the number of pigs born living had been 12–13. JOHANSSON (1929 a), on the other hand, found the lowest mortality in the first 6 weeks in litters of 5 pigs born living, and WENCK (1931) found the lowest mortality in the first 4 weeks in litters of 7 pigs born living.

Nor is the relation of the number of pigs at birth to litter weight at 3 weeks linear. In this case, too, the litter weight will first increase with the number of pigs, but the increase for each pig diminishes as the litters increase, and the highest litter weight is obtained when the number of pigs born living is 15. This result agrees rather well with that of an investigation by ZORN, KRALLINGER and SCHOTT (1933). They found that the maximum litter weight at 4 weeks was attained when 15 pigs had been born living. GRESSEL (1939) found, on the other hand, that the weight of the litter at 4 weeks rose until the number of pigs born living reached 17, and that no falling off could be observed until then.

The relation of the size to the weight of the litter at 3 weeks is practically linear, but the litter weight-increment will decrease slightly with increasing numbers of pigs.

The individual pig weights diminish greatly as the number of pigs at birth in each litter increases, up to about 14–15 pigs to each litter, and then remain practically constant at numbers beyond that. AXELSSON (1921) also came to practically the same result. In relation to litter size at 3 weeks, however, the weights of the individual pig varies differently. The highest pig weights are found in litters which at 3

weeks number 3 live pigs, and diminish with both increasing and decreasing numbers of pigs. Previous investigations, e. g. OLSEN (1939) and BUCHANAN, SMITH, and DONALD (1937) have shown that if litter sizes at a given time are compared with the pig weights at the same time, the pig weights are lower in both especially small and especially large litters.

The figures giving the deviation in kg of individual pigs from the average weight in the litter at 3 weeks have in our investigation been used to measure the evenness of the pigs within the litters. As AXELSSON (1929 b) and KOBLISCHEK (1939) had already found, there is a distinct connexion between litter size and the evenness of the pigs in the litter. The pigs are not as even in large as in small litters.

### **The care and feeding of the sows, and other external circumstances.**

Our investigation has shown that permanent inter-herd differences within the breeds distinctly influence litter sizes at 3 weeks and the numbers of pigs born in each litter. Their influence on litter weight at 3 weeks, though considerably smaller, is still significant ( $P < 0.05$ ), while their influence on the length of the interval between farrows is not significant. This looks as if differences in the quality of the piggeries and long continued divergencies in the care of the pigs in the different herds would influence the mortality in the first 3 weeks the most.

There are also distinct inter-herd differences in the evenness of the pigs, which indicate the importance of feeding and housing to the development of the pigs.

Differences from one year to another in the rationing and care of the pigs in a herd seem to have a relatively much greater effect on the pig production. The number of pigs at birth is least affected by these differences, however, while litter weight and interval between farrows are affected the most. It is quite clear that in the period 1923–1938 progress was fairly steady towards higher average litter weight and shorter interval between farrows. The pig and litter weights were largest in 1935–1937, when the interval between farrows were also as short as they reasonably could be, viz. only just over 180 days. One reason for this was presumably the heavy increase in the price of small porkers noted at that time in comparison with the immediately preceding years. For these 3 years the average price was 117 öre

per kg of live weight (in Skåne), as against only 71 öre in the 3 preceding years.

The variation due to different farrowing months must certainly also be partly due to different feeding, housing, and care, as well as to various climatological factors. The relation of the month of farrowing to the length of the interval between farrows has not been investigated, but in other respects the month of farrowing has affected the litter weight at 3 weeks the most and the number of pigs born in each litter the least. This last effect is not significant. The average number of pigs at birth is slightly larger in the spring and early summer, however, than in the autumn and winter, which agrees with earlier observations by JOHANSSON (1929 a). The influence of the season on the litter size at birth seems negligible, an observation which is confirmed by the investigations of DSCHAPARIDSE (1935) and KRIZENECKY (1935), neither of whom discovered any connexion between the season and the size of the litters.

The effect of the month of farrowing on the litter size at 3 weeks is significant, and we find that mortality in the first 3 weeks is least in spring and summer litters, which agrees well with earlier observations in Sweden (AXELSSON 1928, JOHANSSON 1929 a and 1932). DSCHAPARIDSE also found a 3–6 % higher mortality in winter litters than in summer litters.

The month in which the sows farrowed is responsible for 2.5 % of the total variance in litter weight at 3 weeks. Litters born in October–February weigh considerably less than other litters. AXELSSON (1928), ZORN, KRALLINGER and SCHOTT (1933), MENZIES-KITCHIN (1937), and others, have on the whole come to the same results in their investigations. DSCHAPARIDSE (1935), on the other hand, found no difference in the weight at 4 weeks of summer and winter litters in German herds.

### The age of the sows.

The farrow order is strongly correlated with the age of the farrowing sows, and may therefore to some extent also be regarded as an expression of their ages. In our material no significant difference in the farrowing intervals could be demonstrated, the age of the sows rising evenly with the order of the farrows. This also agrees well with the observations of OLSEN (1939) and KRIZENECKY (1935 c). Although the age of the sows is thus rising evenly with the order of the farrows, there is a certain age variation in farrows of the same order — primarily

due to the varying ages of the sows at their first farrow —, the effect of which is for that very reason most noticeable in the first farrow. In our material the ages of the sows at the first farrow varied from 8 to 23 months.

The age of the sow at the first farrow seems to affect primarily the litter weight at 3 weeks. This increase with age, and the correlation of the age of the sow to litter weight is in our material  $+ 0.157$  ( $P < 0.001$ ). The age at the first farrow is also quite distinctly related to the litter sizes at birth and at 3 weeks. Both these coefficients of correlation are  $+ 0.102$  ( $P < 0.001$ ). The number of pigs born in each litter, and the litter size at 3 weeks, thus increase with the age of the sow at the first farrow. MORRIS and JOHNSON (1932) found exactly the same coefficient of correlation for the age of the sow at the first farrow to the number of pigs born living in each litter. KRIZENECKY (1938 and 1940), on the other hand, found that the age at the first farrow did not influence the number of pigs in either the first or the second litters, nor did an earlier examination of a single herd by JOHANSSON (1929 a) indicate any significant correlation.

The order of the farrow distinctly influences the number of pigs born living and the litter size at 3 weeks.

In our material the number of pigs born in each litter increases up to the third–fourth farrow, remains practically unchanged until approximately the seventh–ninth farrow, and then gradually decreases slightly. This agrees with the result obtained by JOHANSSON (1929 a) in an earlier investigation of Swedish material comprising sows of the Large White breed. On the whole corresponding results have also been obtained by ZORN, KRALLINGER and SCHOTT (1933), MENZIES-KITCHIN (1937), KRALLINGER and GRUHN (1938), OLSEN (1939), OLBRYCHT (1943), and others. LUSH and MOLLN (1942) collated a large number of investigations, also with the same result. KRIZENECKY (1935), on the other hand, found the largest litters as early as in the second farrow.

On examining conditions in litters of equal number of pigs born living, it will be seen that the litter size at 3 weeks decrease as the sows grow older, and that the relation of the farrow order to litter size at 3 weeks is practically linear. The effect of age is slight, however, when the number of pigs at birth is small, but the larger the number of pigs is at birth, the more will their mortality increase with the age of the sow. The coefficient of regression for the effect of age on litter size at 3 weeks, which is  $- 0.020$  when 5 pigs are born living, will be respectively  $- 0.079$  and  $- 0.231$  when 9 and 13 pigs are born living. While



the litter size at birth first increases and then again decreases as the sows grow older, and for the same reason the mortality rate first goes up and then down, the effect of age on the mortality rate is quite different. The mortality rate increases steadily with the age of the sow. The combined result of these factors is thus that the mortality rate will at first increase until approximately the fourth farrow, and will then remain almost unchanged. This, too, agrees fairly well with the results obtained by JOHANSSON (1929 b and 1932), although in his investigations the mortality rate continued to increase slightly with the age of the sow from the fourth farrow onwards. The result of an investigation made by OLSEN (1939), however, seems to agree completely with our observations, although he was dealing with the mortality in the first 8 weeks. ZORN, KRALLINGER and SCHOTT (1933) also found the mortality in the first 4 weeks rising up to and including the fourth farrow. PODHRADSKY (1938) came to the conclusion that the litter size is what affects the mortality of the pigs the most up to and including the fourth farrow, while the influence of the farrow order dominates in later litters.

In comparing farrows of different orders, it is found that the litter weights are throughout smallest in the first litter and largest in the third, and then gradually decrease in later farrows. The individual sows generally seem to reach maximum already in their second farrow. Pig weights, again, are smallest in the first litter, and then remain unchanged from the second litter onwards. It should be remembered, however, that in otherwise similar circumstances the pigs of small litters weigh more than those of large, with the consequence that the relation of pig weight to litter size is largest in the 2nd to 6th farrows.

A comparison with the results of an earlier investigation by AXELSSON (1928) shows a similar variation in the total litter weight. According to him, the total litter weight is largest in the 2nd to 6th farrows, while the pig weight is lowest in the first farrow and largest in the 2nd to 5th, and decreases in subsequent farrows.

The farrow order also affects the evenness of the pigs in the litters. The first farrows produce the most even litters, but the evenness subsequently decreases, i.e. the deviations of individual pigs from the average weight in the litter will increase with the farrow order. In the first 4 farrows this increase is fairly steady, but grows less subsequently, which is in good agreement with the result previously obtained by KOBLISCHEK (1939).

### The number of teats of the sows.

The sow's number of teats was not proved to have a significant effect on the number of pigs at birth, but apparently affects the pig mortality to some extent, and thus also the litter size at 3 weeks. A similar result was obtained in an earlier investigation by JOHANSSON (1929 b), who observed that the mortality in the first 6 weeks dropped from 21.3 % for dams with 12 teats to 17 % for dams with 14. The number of teats has a relatively larger effect on litter weight at 3 weeks. The coefficient of correlation for the number of teats to litter weight at 3 weeks is in the material examined 0.095 ( $P < 0.001$ ). The superiority of sows with larger number of teats seems to some extent to make itself felt even in small litters, but the difference is most marked in litters of at least 11 pigs.

In our material we have been unable to detect any favourable effect of a larger number of teats than 15. If there are more, the pigs seem on the contrary to be slightly more uneven in all litters except the first. This might possibly have something to do with the observations of HUGENROTH (1936) and WILKENS (1936), which indicate that teats not utilized by the pigs of the first litter later become atrophied. The benefit to subsequent litters of a large number of teats thus appears to depend on the number of pigs in the first litter, and when there are more than 15 all will hardly ever be used by the first litter.

### The hereditary part of the variance.

Seeing that only 5 herds of the Large White breed and 3 herds of Landrace are included in our material, this cannot be considered sufficiently representative to judge any possible differences of genetic origin. There seems, however, to be a significant difference between the Large White and the Landrace breeds in the average number of pigs born in each litter. For sows of which particulars are available from their whole production period, that average is 10.79 in the Large White and 9.76 in the Landrace. Reference to previous investigations in Sweden shows that JOHANSSON (1929 a) arrived at the figure 10.71 for the Large White, while AXELSSON's figures (1933) were 11.03 for the Large White and 10.21 for the Landrace.

In examining whether and to what extent a certain character is genetic, it is of importance first to ascertain how far that character may be regarded as an expression of individuality. The intra-indivi-

dual correlation expresses what is specific to or repetitive in the individual.

The coefficient of the intra-sow correlation for the number of pigs born in each litter is 0.124, while the corresponding coefficient in respect of litter size at 3 weeks is only 0.073. Litter size at birth thus seems to be a more highly individual characteristic than litter size at 3 weeks. HALLQVIST (1942) has also observed that the intra-sow correlation for litter sizes decreases with increasing age of the pigs. While according to HALLQVIST the coefficient of correlation of the number of pigs born living is 0.23, the corresponding coefficients for litter size at 3 weeks is only 0.18 and at 6 weeks 0.10. LUSH, ANDERSSON, CULBERTSON, and HAMMOND (1933) also made the same observation. These workers found the intra-sow correlation of the number of pigs to be 0.141 at birth and 0.093 at 60 days. It may also be mentioned that JOHANSSON's (1929 a) coefficients of correlation of the numbers of pigs born living in different farrows vary from 0.059 to 0.387, and that MCPHEE (1932) found the correlation of the first to subsequent litters to be 0.205.

The intra-sow coefficient of correlation of litter weight at 3 weeks is 0.116, i.e. slightly less than that of the number of pigs at birth, but slightly larger than that of litter size at 3 weeks. This result agrees well with that obtained by LUSH, ANDERSSON, CULBERTSON and HAMMOND (1939) in respect of litter weights at 60 days. In this case, too, the same relation obtained, and the intra-sow coefficient of correlation of litter weight was 0.100. In a later investigation by LUSH and MOLLN (1942), different methods of computation gave 0.12, 0.13, and 0.18 as the value of intra-sow coefficients of correlation of litter weight at 60 days. These values, too, are of the same order of magnitude as our coefficient of correlation of litter weight at 3 weeks. The coefficient of correlation which RÜTHER (1940) found by comparing the weights at 4 weeks of first litters with the average weights of a) the first four litters and b) the following four litters, can also be compared with these results. His coefficients were 0.30 and 0.33, which points to a correlation of the individual litters of about 0.19 and 0.21 respectively. As other causes of variation have been disregarded, and as the environments of successive litters may be assumed to be more similar than those of the several sows, these figures are in all probability on the high side.

The dam-daughter correlation of the number of pigs born living determined by us is very small, and not significant. The correlation of individual litters — whether computed from the actual numbers of

pigs in the litters or from differences between the numbers of pigs in each litter and the herd average for the same year — averages only 0.02 in farrows Nos. 1–4. Considerably higher values were obtained by ROMMEL and PHILLIPS (1906) as well as by MORRIS and JOHNSON (1932). Their coefficient of correlation — obtained from large materials — was 0.09. HENKE (1935) got an even higher value, but his material was small. He obtained the coefficient 0.17 from 89 litters of Tamworths, and 0.22 from 71 litters of Berkshires. The dam-daughter correlation coefficient previously found by JOHANSSON (1929 a) in Swedish material is also larger than the one we have found.

LUSH and MOLLN (1942), using the dam-daughter correlation of numbers of pigs born living previously found by ROMMEL and PHILLIPS (1926), JOHANSSON (1929 a), and MORRIS and JOHNSON (1932), computed the genetic part of the total variance by multiplying the coefficient of correlation by 2, which gave the values 0.17, 0.10, and 0.18. From a comparison of these results with the variation they themselves obtained from contemporary sows in the herds, LUSH and MOLLN conclude that most of the last named variation is due to additive inheritance. Using the result of the analysis of variance in Table 26, it will be found that differences in the sires of sows born in the herds in the same year will cause 2.8 % of the total variation. Four times that number should thus give the total hereditary part, in per cent, of the variance. The result will thus be 11.2 % or — expressed as a fraction — 0.11, which agrees well with the value deduced by LUSH and MOLLN from JOHANSSON's (1929 a) dam-daughter correlation. The intra-sow correlations 0.12 and 0.11 computed in different ways also indicate that the genetic parts should be of this order of magnitude. The dam-daughter correlation found is relatively much lower, however, which makes one wonder whether there is not a certain amount of gene interaction. It is also worth noting that sufficient allowance for environmental influences, that tend to increase the dam-daughter correlation, has obviously not been made in the earlier computations of this correlation.

Computed from the variance due to differences in the sires of the sows, the genetic part of the variation in litter size at 3 weeks should be of the same order of magnitude as in the number of pigs born; the smaller intra-sow correlation, however, clearly implies that this is not so, but that the genetic part is here considerably smaller — at most about 0.05–0.07. The dam-daughter correlation of litter size at 3 weeks, on the other hand, seems to be a little larger than that of the

number of pigs born living, but as these are not significant it is hardly possible to draw any tenable conclusions.

Computed from the part of the variance caused by differences in the sires of the sows, the genetic part of the total variance in litter weight at 3 weeks will be 0.09, which agrees well with the intra-sow correlations 0.12 and 0.09.

In this case, too, the dam-daughter correlation seems to imply that the genetically conditioned part will be at least as large, and possibly even slightly larger.

## Conclusions.

The following conclusion may be drawn regarding the factors affecting the number of pigs born living in each litter and the production results at 3 weeks:

1. The number of pigs born in each litter is very little affected by environment, but to some extent by inter-herd differences and differences in the years of birth of the sows. Litter size at 3 weeks is relatively slightly more affected by the same factors, and differences in the environment has an even greater affect on the litter weight at 3 weeks. The differences in litter weights due to the sows' having received different rations and care in the herds in different years are particularly large. The best average results were obtained in the period 1935-37. Litters born in the spring or early summer have the lowest mortality and the highest litter weight. Litter weight is less affected than litter size by inter-herd differences. Inter-herd differences also influence the evenness of the pigs in the litters.

2. Differences in the number of teats primarily affect litter weight at 3 weeks, but their effect on litter size is also significant. The larger the number of pigs at birth, the more favourable the effect of a larger number of teats on the result at 3 weeks. In farrows of higher orders, a number of teats exceeding 15 seems to increase to some extent the deviations in the weights of the pigs from the average of the litter.

3. The number of pigs born living in each litter increases with the farrow order until the third or fourth farrow, and then subsequently decreases very gradually. For equal numbers of pigs born in each litter, the mortality will increase steadily with the farrow order. In relation to litter size, litter weight and pig weight are largest in farrows of the orders 2-6. The deviations in the weight of the pigs from the average of the litter increase with the farrow order.

4. The heredity of the sow has, generally speaking, the same effect on the number of pigs born in each litter as on the litter weight at 3 weeks determining 10–12 per cent of the total variance. The litter size at 3 weeks is somewhat less affected. The deviations in the weights of the pigs from the average of the litter at 3 weeks also seem to depend to some extent on the heredity of the sows.

The intervals between farrows are most affected by differences in the years of birth of the sows and by individual differences between the sows. No genetic differences between the sows can be traced, nor does the farrow order seem to affect the length of the intervals between farrows. When business is booming, the intervals between farrows are short, and the owner probably tries to obtain as many litters as possible from certain sows, which also tends to make their intervals between farrows shorter than those of other sows.

## Literature cited.

- AXELSSON, J. 1928. Några betydelsefulla faktorer inom vår svinavel. — Nordisk Jordbruksforskning, 10, 215—252.
- 1929 a. Sambandet mellan antalet grisar i kullarna vid födseln och medelvikten per gris i desamma vid olika ålder. — Beretrn. om N. J. F:s 4. Kongres, 123—141.
- 1929 b. Resultaten från den av Malmöhus läns svinavelsförening anordnade smågriskontrollen vid Svalöf åren 1927—29. 44 s. Malmö.
- 1933. Einige Resultate der Schweinemastkontrolle in Malmöhus Län. — Z. f. Züchtung B, 28, 157—191.
- BONNIER, G. & TEDIN, O. 1940. Biologisk variationsanalys. — Stockholm. 325 s.
- BUCHANAN SMITH, A. D. & DONALD, H. P. 1937. Weaning weight of pigs and litter sampling with reference to litter size. — J. Agr. Sci., 27, 485—502.
- DICKERSON, G. E. 1942. Experimental design for testing inbred lines of swine. — J. Anim. Sci., 1, 326—341.
- DSCHAPARIDSE, D. 1935. Untersuchungen zur züchterischen Beurteilung der Fruchtbarkeit, des Geburt- und des Vierwochengewichtes bei dem Hannover-Braunschweigischen Landschwein. — Züchtungskunde, 10, 208—217.
- EDIN, H. 1938. Svinstamkontrollens metodtekniska förutsättningar. Den ekonomiska innebörden av dess olika resultat. Inkallningsförfarandets standardisering. — K. Lantbr.-Akad. Handl. o. Tidskr., 77, 164—217.
- EDIN, H. & HELLEDAY, T. 1935. Angående baconsvinets nettoenergibehov (underhålls- och produktionsfoder) och tillväxt mellan 15 och 90 kg levande vikt samt en del därpå inverkan faktorer. — K. Lantbr.-Akad. Handl. o. Tidskr., 74, 225—314.
- FISHER, R. A. 1932. Statistical methods for research workers. — Edinburgh. 307 s.
- GRESSEL, A. 1939. Das Schäbisch-hällische Schwein, Untersuchungen über seine geschichtliche Entwicklung und Leistungen. — Z. f. Tierzüchtung u. Züchtungsbiol., 44, 155—210.
- HALLQVIST, C. 1942. The individuality of sows in regard to size of litters. — Hereditas, 28, 127—135.
- HENKE, L. A. 1935. Is fecundity in swine inherited? — J. of Heredity, 26, 455—456.
- HUGENROTH, K. 1936. Beobachtungen bei der Ferkelaufzucht. — Z. f. Schweinezucht, 43, 686—687.
- JOHANSSON, I. 1929 a. Statistische Untersuchungen über die Fruchtbarkeit der Schweine. — Z. f. Tierzüchtung u. Züchtungsbiol., 15, 49—86.
- 1929 b. Statistiska undersökningar över svinens fruktsamhet. — Beretrn. om N. J. F:s 4. Kongres, 87—99.
- 1932. Problems in breeding for high prolificacy. — Pig Breeders' Annual, 11, 80—87.
- KOBLISCHEK, S. 1939. Über die Ausgeglichenheit der Ferkelgewichte als Leistungseigenschaft bei Schweinen und die sie beeinflussenden Faktoren. — Züchtungskunde, 14, 418—424.

- KRALLINGER, H. F. & GRUHN, R. 1938. Untersuchungen über Geschlechtsleben und Fortpflanzung der Haustiere. Wurfnummer und Wurfgrösse beim Hausschwein. Zugleich ein Beitrag zur Methodik der Erbgutschätzung in der Schweinezucht. — *Landw. Jahrbücher*, 85, 828—867.
- KRIZENECKY, J. 1935 a. (The litter size in the pig in its dependance upon physiological non-hereditary factors. II. Influence of the age of the mother-sow and of the number of the litter.) — *Sbornik CAZ*, 10, 140—154.
- 1935 b. (The litter size in the pig in its dependance upon physiological non-hereditary factors. I. The influence of the yearseason of the litter and of the birth-date of the mother-sow, of the period since the last farrowing and of the gestation-length.) — *Sbornik CAZ*, 10, 64—72.
- 1935 c. (On some correlations in the reproduction in the pig.) — *Sbornik CAZ*, 10, 175—177.
- 1938. (Über den Einfluss des Alters der Sauen bei dem ersten Wurf auf ihre spätere Fruchtbarkeit.) — *Sbornik CAZ*, 13, 414—421.
- 1940. (Über den Einfluss des Alters der Sau beim ersten und zweiten Wurfes.) — *Sbornik CAZ*, 15, 325—337.
- LUSH, J. L., ANDERSON, A. L., CULBERTSON, C. C. & HAMMOND, W. E. 1933. The reliability of some measures of the productiveness of individual brood sows. — *Am. Soc. Animal Prod. Rec. Proc. 26th Ann. Meet.*, 282—287.
- LUSH, J. L. & MOLLN, A. E. 1937. The degree to which litter size is a constant characteristic of sows. — *Am. Soc. Animal Prod. Res. Proc. 30th Ann. Meet.*, 133—137.
- 1942. Litter size and weight as permanent characteristics of sows. — *U. S. Dept. Agr. Techn. Bull.*, 836, 1—40.
- MCPHEE, H. C. 1932. Size of litter as a selection index in swine. — *Am. Soc. Animal Prod. Rec. Proc. 24th Ann. Meet.*, 262—264.
- MENZIES-KITCHIN, A. W. 1937. Fertility, mortality and growth rate in pigs. — *J. Agr. Sci.*, 27, 611—625.
- MORRIS, H. P. & JOHNSON, D. W. 1932. Effects of nutrition and heredity upon litter size in swine and rats. — *J. Agr. Res.*, 44, 511—521.
- NACHTSHEIM, H. 1924. Untersuchungen über Variation und Vererbung des Gesäuges beim Schwein. I. — *Z. f. Tierzüchtung u. Züchtungsbiol.*, 2, 113—161.
- NORDFELDT, S. 1941. Undersökningar över sambandet mellan svinstallarnas beskaffenhet och svinens tillväxt och foderförbrukning. — *Svenska Svinavelsföreningens Tidskr.*, 53—61.
- OLBRYCHT, T. M. 1943. The statistical basis of selection in animal husbandry. Part I. Studies on life performance of brood sows: an analysis of variance and covariance of progeny born and reared. — *J. Agr. Sci.*, 33, 28—43.
- OLOFSSON, N. E. & LARSSON, S. 1930. Undersökningar angående modersuggornas produktion och smågrisarnas utveckling. — *K. Lantbr.-Akad. Handl. o. Tidskr.*, 69, 559—601.
- OLSEN, H. M. 1939. Pættegrisenes Levedygtighed og Vækstevne. — 186de Beretning fra Forsøgslaboratoriet, 125—146.
- PLUM, M. 1938. Inheritance of mammae in swine, a character involving partly symmetrical organs. — *Hereditas*, 24, 216—230.



- PODHRADSKY, J. 1938. (Der Einfluss der Wurffolge auf die Sterblichkeit der Ferkel bei der Geburt.) — Sbornik CAZ, 13, 619—628.
- ROMMEL, G. M. & PHILLIPS, E. F. 1906. Inheritance in the female line of size of litter in Poland China sows. — Amer. Phil. Soc. Proc., 45, 245—254.
- RÜTHER, K. 1940. Untersuchungen an Ergebnissen der Zucht- und Mastleistungsprüfungen beim veredelten Landschwein in Westfalen. — Z. f. Tierzüchtung u. Züchtungsbiol., 45, 309—357.
- SNEDECOR, G. W. 1938. Statistical methods. — Ames, Iowa. 388 s.
- WENCK, E. 1931. Über die Beziehungen zwischen der Entwicklung der Saugferkel und ihren späteren Mastleistungen als Grundlage der Herden- und Zuchtwertbeurteilung. — Z. f. Züchtung B, 22, 1—33.
- WILKENS. 1936. Beobachtungen bei der Ferkelaufzucht. — Z. f. Schweinezucht, 43, 700—701.
- WINSOR, C. P. & CLARKE, G. L. 1940. A statistical study of variation in the catch of plankton nets. — J. of Marine Res., 3, 1—34.
- ZORN, W., KRALLINGER, H. F. & SCHOTT, A. 1933. Untersuchungen zur züchterischen Bewertung der Fruchtbarkeit und des Vierwochengewichtes bei weissen Edelschwein. — Züchtungskunde, 8, 433—45.

# Studies on Monozygous Cattle Twins

## VIII. Amount and Composition of the Milk as affected by Frequency of Milkings

By ARTUR HANSSON and GERT BONNIER

Animal Breeding Institute, Wiad, Eldtomta, Sweden.

The results of earlier investigations into the effect of frequency of milkings upon milk production are rather conflicting. This fact seems mainly to be due to some deficiency in the experimental methods. Several of the previous investigations (cf. LUND, 1911, LALIM and GRANDE, 1912, NILSSON, 1922 and WOODWARD, 1931) have been carried out as period trials, with in most cases very short experimental periods. Because the change from one milking system to another definitely has in all cases a disturbing effect upon the rhythm of milk secretion, such trials often give an incorrect result. In the cases (cf. WOODWARD, 1931, NORTON, 1932, COPELAND, 1934, RICE, 1934, and LUDWIN, 1942) where the investigations have been carried out as long-term group trials, or where materials from herd-books have been collected and analysed, this experimental error has only a slight influence. In such investigations, however, differences in milking ability and differences in feeding intensity may greatly influence the results obtained (cf. LUND, 1911). By using identical twins in such trials it is possible to eliminate almost entirely the errors mentioned above.

On account of the shortage of man power in Swedish agriculture, the question of the number of milkings per day has been of current interest, and therefore a milking trial has been carried out on identical twins in order to throw some light on this problem. In the experiment two pairs of identical twins were used: no. 117 and 118 Fjälla of the Swedish Polled breed and no. 121 and 122 Vendla of the Swedish Red and White breed. Until the first calving all animals were normally

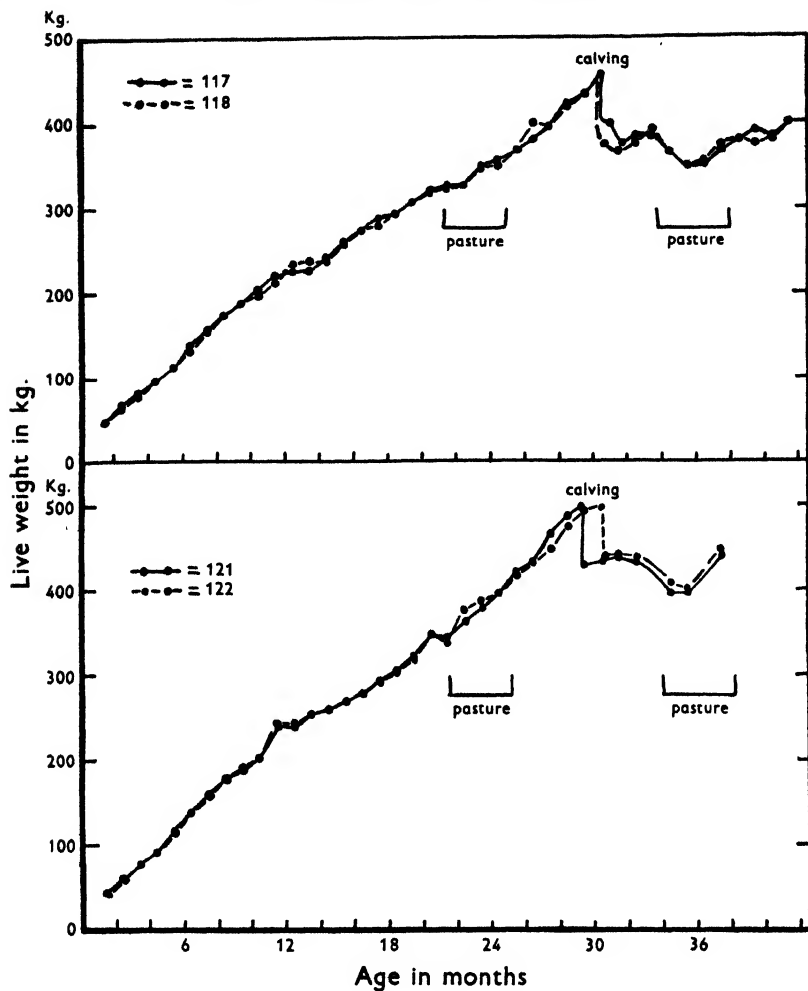


Fig. 1. Growth curves for the live weights of the twins.

and, within pairs, identically reared. The growth curves for the pairs are represented in fig. 1. After the first calving the twins were also normally fed with regard to their live weights and milk productions. In order to follow as closely as possible the practice in Swedish farms, all the animals were allowed to graze in the summer. The details of experimental feeding, control of growth and milk production in the twin experiments have been described elsewhere. (BONNIER, 1946.)

Within each twin pair, during the first lactation, one twin was milked twice and the other three times a day. In the 29th. week of lactation,

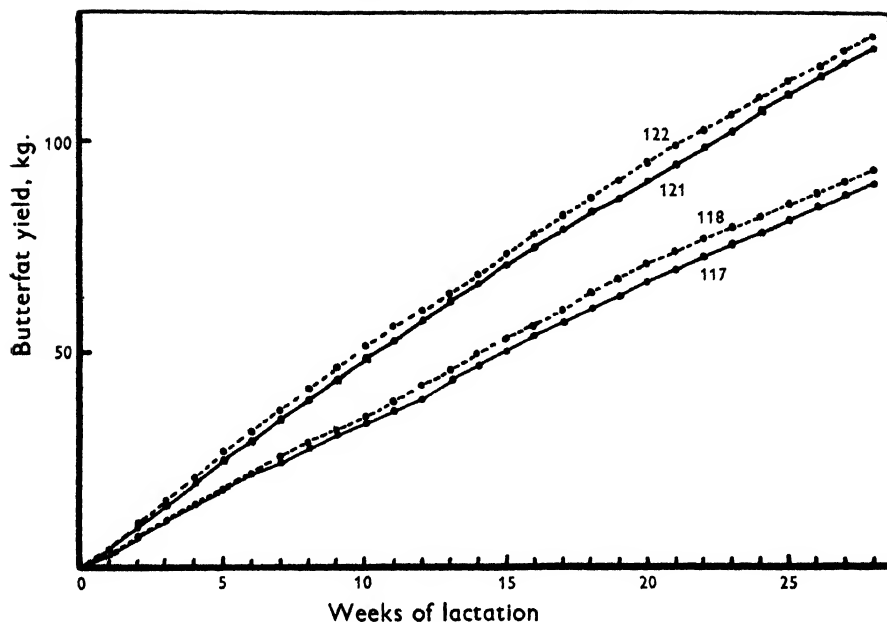


Fig. 2. Summation-curves of the butter-fat yields for the twins.

Table 1.

Amount of milk and milk constituents during the first 28 weeks of the first lactation.

Twin no.	Number of milkings per day	Milk kg	Fat kg	Sugar kg	Protein kg	Ash kg	Total solids kg	Energy ton. cal.
117 Fjälla	2	2338	89.8	125.6	80.1	16.1	311.6	1.783
118 "	3	2589	93.1	138.5	83.8	17.2	332.6	1.886
Difference	(3-2)	+251	+3.3	+12.9	+3.7	+1.1	+21.0	+103
121 Vendla	2	3074	121.9	161.8	94.0	19.5	397.2	2.300
122 "	3	3167	124.9	164.3	97.6	20.3	407.1	2.362
Difference	(3-2)	+93	+3.0	+2.5	+3.6	+0.8	+9.9	+62

however, 121 Vendla developed an udder obstruction, which resulted in her having a blind quarter. On account of this misfortune it is only the yield during the first 28 weeks of lactation that has been worked out. This period, however, embraces that part of lactation during which the influence of milking frequency upon milk production is expected to be at its greatest.

The twins were machine-milked at 05.00 and 17.00 hours, and, in

the case of three milkings, at 11.00 hours as well. At each milking the milk was weighed, and specimens for fat analysis, removed. In addition, every fortnight specimens were removed during a period of four consecutive days, with the aid of which the content of fat, sugar, protein and ash in the milk was chemically determined.

In order to present a general picture of the results of the experiment, summationcurves of the butter-fat yields are shown in fig. 2. These curves show, firstly, that the two twin pairs have different milking ability and, secondly, that at three milkings per day the cows have produced more milk. The differences between two and three milkings are, however, rather slight, which also can be seen from table 1, in which the total production of milk, fat, sugar, protein, ash and dry matter is shown. On the basis of the amount of fat, sugar and protein produced, the total amount of energy has also been calculated. It is apparent from the table that three milkings per day have had a greater effect upon the yield of milk and milk constituents in the case of the twin pair giving low production than it has in the case of the other twin pair, especially with regard to the amount of sugar produced.

In practice it is a common idea that the cow will reach maximum milk production faster if milked more frequently. In order to determine whether this is really the case, the weekly yields of fat during the first eight weeks of lactation have been inserted in fig. 3. As can be seen, the midday-milking does not hasten the increase of fat production in the pair 117, 118 Fjälla, and only slightly accelerates the increase in the pair 121, 122 Vendla. Within the twin pairs the lactation curves are quite similar to each other. In order to investigate further whether the frequency of milking has a greater influence during the first part of lactation than later, in table 2 the percentage increase of yield, as an effect of three milkings per day, has been calculated partly for the first 14 weeks of lactation and partly for the 14 weeks following. As regards the milk yield there is no difference, but the increase of fat is greatest during the first period. In the case of sugar, and of protein, ash and energy as well, the effect is reversed. The differences are, however, rather slight. The total increase of yield as an effect of the three milkings was (in percent of the amounts at two milkings) for milk 6.4, fat 3.0, sugar 5.8, protein 4.0, ash 5.4, dry matter 4.4 and for energy 4.0. As a matter of fact it may be said that three milkings have had only a slight effect upon milk production compared with two milkings. In this connection it may again be pointed out that in the experiment the twins have been milked two and three times per day during the whole period of 28 weeks. If, as in

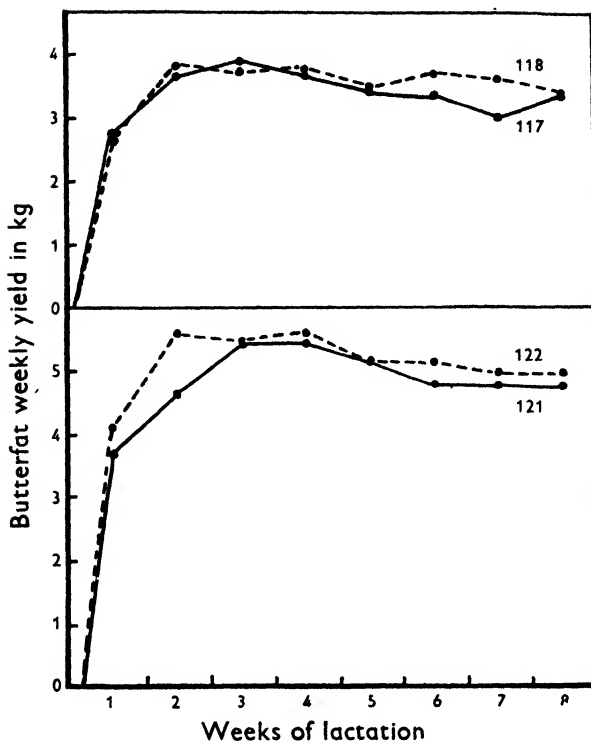


Fig. 3. Weekly butter-fat yield in the different twins during the first eight weeks of lactation.

Table 2.

Increase in yield in per cent at three milkings per day compared with two milkings.

Lactation weeks	Milk	Fat	Sugar	Protein	Ash	Total solids	Energy
0-14	6.2	4.1	3.0	1.1	2.9	2.8	2.8
14-28	6.5	1.8	8.2	7.6	8.6	6.2	5.0
Total	6.4	3.0	5.8	4.2	5.4	4.4	4.0

practice, the twins had been milked three times per day only during the first part of lactation, the percentage increase would naturally have been less. Besides, it is to be expected that the change from three to two milkings per day would have affected the milk secretion and thus further reduced the total effect of three milkings.

In table 3 the effect of the frequency of milking upon the composi-

*Table 3.*

Percentage composition of the milk after two and three milkings.

Number of milkings per day	Fat %	Sugar %	Protein %	Ash %	Total solids %
2	3.91	5.31	3.22	0.66	13.10
3	3.79	5.28	3.15	0.65	12.87

tion of the milk is shown. As a result of three milkings, the concentration of all the substances in the milk is lowered, and it may therefore be said that the main effect is an increase in water secretion.

### Discussion.

Several research workers (cf. NORTON, 1932, COPELAND, 1934, RICE, 1934 and LUDWIN, 1942) have studied the effect of the frequency of milkings by collecting from herd-books the milk yields from cows milked different numbers of times per day. As a rule they have compared the yields in different lactations from one and the same cow, which has thus been milked a different numbers of times during different lactations. In table 4 the results from these investigations have

*Table 4.*

Effect of frequency of milkings on yield, according to different workers.

Author	Increase in per cent		
	2 milkings compared with		3 milkings compared with 4
	3	4	
Woodward (1931) ..	20	—	—
Norton (1932) ..	20	31	19
Copeland (1934) ..	21	—	—
Rice (1934) ..	20	37	15
Ludwin (1942) ..	26	38	17

been gathered. Copeland's data are based on Jersey R. O. M. records, and the others on Holstein-Friesian A. R. records. In all these investigations the frequency of milkings has greatly influenced the milk production. As in all investigation based on experiments, the effects of frequency of milking on milk production is much lower than in the above mentioned investigations there seems to be some systematical

error in the latter. LUDWIN, 1942 has pointed out that there may be a correlation between milking frequency and feeding intensity in practice, and this correlation affects the result. Further, selection may have influenced the result, because, herds and possibly also cows, with high milking ability may have been milked more frequently than have cows with poorer milking ability. On account of this, these investigations probably do not give a true picture of the influence of milking frequency upon milk production.

Other research workers have studied the present problem by conducting short-term trials and comparing three milking with two. LUND (1911) found an increase in milk of 6 per cent and LALIM & GRANDE (1912) 7-8 per cent. NILSSON (1922) found an increase of 3 per cent at an average daily yield of 10 kilogrammes milk per cow, and about 10 per cent at an average yield of 16-18 kilogrammes milk. WOODWARD (1931) found the same result as NILSSON. In several of these investigations, however, three milkings per day was found to have a greater effect than in the present investigation. This fact clearly depends upon the experimental methods used. As mentioned earlier, a change from one milking system to another also means a disturbing effect upon milk secretion. It is in the nature of things that this effect will be more important when the change is from three to two milkings than if in the opposite direction. Therefore such short-term experiments will overestimate the effect of the frequency of milkings upon milk production. Another difference between the earlier and the present investigation is that in the latter the animals have been milked according to the same system from the beginning of the first lactation, and therefore have been allowed to adapt themselves to the milking system. In earlier investigations the cows have had their milking system changed during one and the same lactation, or between lactations. The results obtained in these investigations therefore depend both upon the frequency of milkings and upon the change in the milking system itself. The last mentioned cause tends to affect the yield in such a way that the influence of frequency of milkings will be overestimated.

The slight effect of the frequency of milkings upon milk secretion indicates a great ability in the cows to adapt themselves to the milking system. In this connection it is of interest to note that SWETT, MATTHEWS, MILLER & GRAVES (1938) and HANSSON (1946) found the same to be true in the case of blind quarters. When a cow gets a blind quarter, the yield from the remaining quarters increases so that the total decrease in yield is reduced.



The results thus indicate that, from an economical point of view, milking more than twice a day is not justified. From the same point of view it is preferable to increase milk production by sound feeding and intensified selection rather than by milking three times a day.

### Summary.

The effect of frequency of milkings upon milk production has been studied. The results reached indicate that it does not pay to milk more than twice a day. If milk production is to be increased sound feeding and intensified selection are to be preferred rather than milking three times a day.

### Literature cited.

- BONNIER, G. 1946. Studies on monozygous cattle twins. I. General introduction. *Acta Agr. Suecana* 1, 139-146.
- COPELAND, L. 1934. Milk and butterfat yields of Jersey cows as affected by frequency of milking. *J. Dairy Sci.*, 18, 815-821.
- HANSSON, A. 1946. Studies on monozygous cattle twins. III. The effect of udder destructions on milk secretion. *Acta Agr. Suecana* 1, 153-162.
- LALIM, A. & GRANDE, I. 1912. Sammenligning mellem 2 og 3 gangs daglig melkning. 8de beretning fra Foringsforsøksstationen ved Norges Landbrukshøiskole, 11-33.
- LUND, . 1911. Forsøg med Malkekøer: 2 eller 3 Gange Malking daglig. 78de Beretning fra Forsøgslaboratoriet, København.
- LUDWIN, I. 1942. The effect of number of daily milkings upon persistency of milk production. *J. Animal Sci.*, 1, 300-308.
- NILSSON, I. 1922. Lönar sig middagsmjölkning? Ref. Sveriges Allmänna Jordbrukstidskrift 23, 353-356.
- NORTON, H. W. 1932. Adjusting records for comparison. *Holstein-Friesian World* 29, 799-800.
- RICE, V. A. 1934. Breeding and improving farm animals. New York.
- SWETT, W. W., MATTHEWS, C. A., MILLER, F. W. & GRAVES, R. R., 1938. Nature's compensation for the lost quarter of a cow's udder. *J. Dairy Sci.*, 21, 7-11.
- WOODWARD, T. E. 1931. The production of dairy cows as affected by frequency and regularity of milking and feeding. *U. S. D. A. Cir.*, 180.

# The Biological Processes in the Warm-Water Retting of Flax

By L. ENEBO

Department of Biochemistry, Royal Institute of Technology, Stockholm.

Flax-retting in the true sense of the term is a microbial process. The technical purpose of the retting is to liberate the flax fibre from the surrounding parenchymatous cell tissue by the dissolution of the latter, after which the fibre may be freed mechanically from the remainder of the flax stalk (epidermis, woody pith etc.), and also to soften the intermediate lamellae between the individual fibre cells. The last-mentioned process makes possible a certain gliding of the elementary cells over one another in wet spinning. The main chemical characteristic of the retting is the dissolution and degradation of the pectin substances in the parenchyma layer surrounding the fibre bundles. For this reason the process is usually described as a *pectin fermentation*.

The swelling and the dissolution in the flax stalk during the retting process are illustrated by the microphotographs on p. 321.

The microbiological attack on the pectin substances in the flax retting can be brought about by several different types of microorganisms, depending upon the procedure by which the retting is performed. The present paper deals only with warm-water retting, i. e. a process during which the flax straw is kept immersed in water at 30–40° C. The spontaneous warm-water retting, which is employed at all Swedish retteries, is developed by the combined action of a number of different microorganisms which enter the retting vats, chiefly with the soil adhering to the roots of the flax. The microflora may conveniently be divided into *true retting bacteria* and *subsidiary flora*. It appears that in the warm-water retting only two true retting bacteria participate. These are called *Granulobacter pectinovorum* and *Bacillus felsineus* (*Clostridium felsineum*). The subsidiary flora, on the

other hand, is more varied and appears to contain not only organisms that are of importance in the retting process, but also quite irrelevant species.

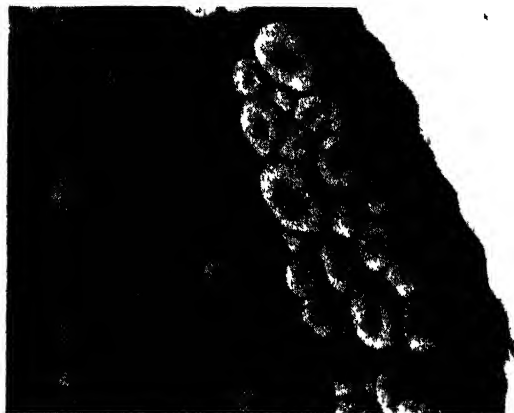
As the microbiology of the retting process had apparently not formed the object of any previous investigation in Sweden, it was thought desirable to attempt, by experiments with Swedish flax, a verification of the main results obtained in other countries with respect to the details of the retting process. The fact that this purpose has, in the main, been achieved, shows that the foreign results, which are partly based on very comprehensive and lengthy experiments, may be applied in principle to flax-retting in Sweden. Hence this publication contains, in addition to certain completely new data, accounts of experiments largely resembling those carried out in Russia and to a smaller extent in Germany.

## I. The Anaerobic Flax-Retting Bacteria.

In 1879 VAN TIEGHEM gave the name *Bacillus amylobacter* to a group of bacteria which were stained blue with iodine. VAN TIEGHEM showed, among other things, that this group was active in the retting of flax. Certain flax-retters isolated at a later date, such as *Plectridium* Friebes, *Clostridium* Behrens, *Granulobacter pectinovorum* and *Granulobacter urocephalum* Beijerinck et van Delden and *Plectridium pectinovorum* Störmer together with a large number of other flax-retting types, were given the collective name *B. amylobacter* by BREDEMANN in 1909. BREDEMANN's description of the morphological and cultural properties of *B. amylobacter*, based on the investigations of himself and others, is very comprehensive, while little attention has been paid to the metabolism of this group.

The majority of the bacterial strains that BREDEMANN considered to belong to the group *B. amylobacter*, possibly correspond, according to the modern nomenclature (cf. BERGEY et al. 1939), to *Clostridium butyricum*, the type species for the *Clostridium* genus. It is difficult, however, to decide whether a given bacterium is identical with *Cl. butyricum*, especially in the case of the older species.

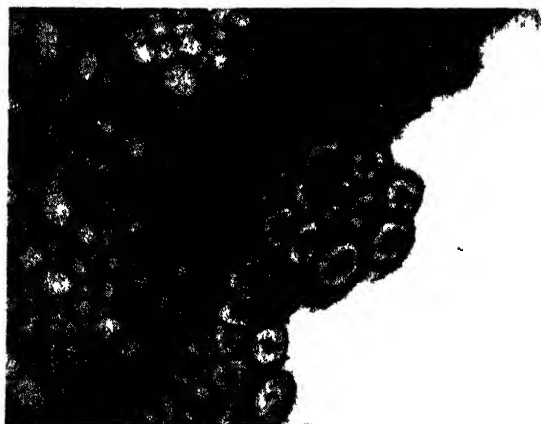
In the more recent flax literature the name *Gr. pectinovorum* is generally applied to the flax-retting (pectin-fermenting) type of *B. amylobacter*. As this pectin-fermenting variety is not to be found under the genus *Clostridium* in the latest (5th) edition of BERGEY's *Manual*, the present author has found it preferable to use for this



a



b



c

*Fig. 1.* Part of the cross-section of a flax stalk at different phases of the ret, 350 X.

a. Unretted.

b. Retted for 3 days (complete retting).

c. Retted for 5 days (over-retting).

It will be seen how the thin intermediate lamellae between the fibre cells swell during the retting and are finally dissolved during the over-retting stage, so that the fibre cells are liberated one from the other. At the time of complete retting the pectin-containing parenchymatous layer, in which the fibres are embedded, has been loosened to such an extent that it easily separates from the fibre. After 5 days the outer parts of the parenchymatous layer have disappeared.

The *lighter* zone within the parenchymatous layer is the lignified core of the stalk.

bacteria the term usually employed in the flax literature, namely *Gr. pectinovorum*. In concordance with the literature, CARBONE's bacterium has also been named *Bacillus felsineus*, despite the fact that according to the modern nomenclature it should be called *Cl. felsineum*. When *Gr. pectinovorum* is included in the *Clostridium* genus there is naturally no reason to adhere to the old names.

Before CARBONE's (1916) discovery of *B. felsineus*, *Gr. pectinovorum* was considered to be solely responsible for the retting of flax. CARBONE, however, deemed this opinion incorrect, believing that *B. felsineus* was actually the flax-retter. RUSCHMANN and BAVENDAMM (1925) nevertheless continued to regard *Gr. pectinovorum* as the bacterium mainly active, even if *B. felsineus* could be shown to participate in flax-retting in Germany. More recently opinion has inclined towards CARBONE's views, in so far as both bacteria have been recognized as powerful flax-retters. Thus, A. ORLA-JENSEN and KLUYVER (1939) demonstrated that *B. felsineus* dominated in the Dutch flax-retting.

Towards the end of the nineteen-thirties the microbiology of the retting process became the object of comprehensive research in Russia, special attention being devoted to the relationship between *Gr. pectinovorum* and *B. felsineus*, which in Russia, just as in Italy, Germany and Holland, appeared simultaneously in the warm-water retting of hemp and flax. *B. felsineus* was isolated for the first time in Russia by KRUTIKOVA (see MARKOVA 1940) in the year 1933. A detailed comparison between *Gr. pectinovorum* and *B. felsineus* has been made by MARKOVA (1940). To sum up, it may be said that the bacteriological research on the anaerobic flax-retters has led to the view that the spontaneous warm-water retting is brought about by two pectin-fermenters, *Bacillus felsineus* and *Granulobacter pectinovorum*.

Conflicting reports have been published with regard to the mutual relations between the two retting bacteria in spontaneous retting. A. ORLA-JENSEN and KLUYVER found that *B. felsineus* dominated in Dutch retting. A similar finding was made by RUSCHMANN and BARTRAM (1943) for the German process. MARKOVA considers that *B. felsineus* gradually displaces *Gr. pectinovorum* and concludes the retting alone.

The most important point in the technical respect is presumably that the old view of CARBONE that *B. felsineus* was especially suitable as a retting bacterium has now been confirmed in various quarters. Both RUSCHMANN and the Russian workers claim that *B. felsineus* is superior with respect to the retting velocity, also giving the highest yield and the best quality of fibre (cf p. 346).

### Experimental.

#### *Isolation of Granulobacter pectinovorum and Bacillus felsineus.*

In comparative experiments with *carrot agar* (RUSCHMANN and BAVENDAMM), *yeast-water carrot agar* and *yeast-water glucose agar* (A. ORLA-JENSEN and KLUYVER), we found that the latter was the most suitable for both *Gr. pectinovorum* and *B. felsineus*. On carrot agar we obtained hardly any growth of *B. felsineus*, in agreement with MARKOVA. Yeast-water glucose agar, which was specially recommended by A. ORLA-JENSEN and KLUYVER for *B. felsineus*, was found to be as effective as yeastwater galactose agar, which latter substrate was employed by MARKOVA and other Russian workers.

Pure cultures were made from partially retted flax towards the conclusion of the process. Small pieces of straw were ground with a small quantity of retting liquor in a sterile mortar, after which plate pourings were made in the usual manner. For this purpose 7 cm. Petri dishes were employed. These were kept in evacuated preserving jars in which residual oxygen was removed by means of pyrogallol and caustic potash. The jars were kept at 37° C for at least 5 days. The pouring was repeated a number of times.

In order to check the results of the above experiments, agar slants and tubes containing liquid substrate (carrot juice and potato juice) were seeded with the culture after each spread. Such cultures from the third and subsequent pouring were then used as seed cultures in pure-culture experiments.

By the procedure above described it was a simple matter to obtain strains of *Gr. pectinovorum*. Since, however, these only retted with difficulty flax sterilized in the autoclave, they were of interest only in so far as they could be used for the study of their morphology, which facilitated the distinction between colonies of *pectinovorum* and *felsineus* in plate pourings from flax in the course of retting. Of greater interest was the isolation of *B. felsineus* from Swedish flax.

The first strain of *B. felsineus* was obtained from retted and prepared *Belgian* flax. The fibre was clipped into small pieces. Water was added to these in a flask plugged with cotton wool. The mixture was then seeded with *Sacch. ellipsoideus* and kept at 37° C. The contents developed about the same odour as that found in spontaneous retting. On pouring, *Gr. pectinovorum* was obtained in quite large quantities together with individual bright-orange-coloured *felsineus* colonies.

During the autumn of 1944 samples were obtained of partially ret-

ted flax and retting liquor from the Swedish flax retteries. *Even though B. felsineus was lacking in some of the cultures, it could nevertheless be shown that this bacterium occurred at all the retteries. In this country, therefore, Gr. pectinovorum and B. felsineus are simultaneously active in the warm-water retting of flax.*

## II. The Subsidiary Flora.

### 1. The Composition of the Subsidiary Flora.

The literature dealing with this subject is very scanty. STÖRMER (1904) reported the following observations regarding the microorganisms not partaking in the actual degradation of the pectins:

(1) Both in the material to be retted and in the retting liquor there are an extremely large number of *non-spore-forming bacteria*, which grow on meat peptone gelatin. Spore-forming gelatin bacteria are, however, lacking. According to STÖRMER, the dominant varieties appear to be:

Type a *Pseudom. fluorescens*.

- » b A species greatly resembling *E. coli* but not identical with this.
- » c A short rod, not liquefying gelatin, with yellow, slimy surface colonies and very regular, lensshaped subsurface colonies.
- » d A rod with yellow, rosette-shaped subsurface colonies, which slowly liquefies gelatin.

(2) An important part of the subsidiary flora consists of *yeast* and *oidiumlike fungi*. The latter mostly form the thick film which is developed on the surface of the retting liquor, while the yeast largely adheres to the retted material.

RUSCHMANN reported (1923), in addition to the above-mentioned organisms, several aerobic spore-forming bacteria in the subsidiary flora (*Bac. mesentericus*, *subtilis*, *asterosporus* and *megaterium*). These bacteria were considered to be of little importance in warm-water retting, but to possess nevertheless a certain interest, since some of them could display an *aerobic* retting action when the air supply was adequate, and thus attack moist, fully retted flax.

While STÖRMER considered that the total number of aerobic and facultative aerobic bacteria decreased towards the conclusion of the retting as a consequence of the bactericidal action of the organic acids,

RUSCHMANN maintained that the total quantity of »attendant bacteria» showed an uninterrupted increase. Counts of bacteria appear, however, to be so dependent upon the conditions of retting and the experimental technique in other respects, that it is difficult fully to elucidate this point.

MINERVIN (1925) reported that the most important members of the subsidiary flora were two diplococci and a small rod bacterium, the latter resembling *Gr. pectinovorum*, but giving no reaction on granulose. MINERVIN's view thus differed appreciably from that of RUSCHMANN.

Since the publication by STUTZER (1927) of a quite comprehensive investigation of the subsidiary flora, it would appear that little work has been done on this aspect of the flax-retting problem. STUTZER arrived at the following conclusions:

- (1) Bacteria belonging to the *coli* group (family *Eschericheae*, according to *Bergey et al.*) are present during the entire retting process.
- (2) Rossi's aerobic flax-retter, *Bac. Comesii*, is present during the first phase of the retting.
- (3) Bacteria belonging to the *subtilis* group are mainly discernible at the commencement of the ret.
- (4) *Streptococcus lactis* occurs in both phases of the retting.
- (5) The number of micrococci is large at the end of the retting.
- (6) *Vibrions* (sulphur bacteria) appear only when the ret is complete.

### Experimental.

In order to obtain a survey of the most common aerobic and facultative anaerobic species in the subsidiary flora, plate pourings with nutrient agar were made from laboratory rets in different phases. The rets, which were carried out partly at 30° C, and partly at 37° C, proceeded in tall, 5-litre beakers, fitted with glass lids. For these experiments pieces of about 25 cm length were removed from the central parts of the flax stalks and tied into bundles. The ratio flax-straw:water (f) was 1 : 15. The retting was complete after about 4 days at 30° and after about 3 days at 37°. The plates were incubated under aerobic conditions at 30° and 37°.

The results agreed in part with the findings of STÖRMER and STUTZER. Of the three dominant bacteria, two (I and II) corresponded to the atypical variants of *E. coli* which have been termed *paracoli* species by several authors, including STUTZER. The third dominant rod bacterium (III), which appeared in large quantities at the commencement of the retting and afterwards disappeared, was identified as a



*Flavobacterium*. There appeared in smaller quantities a species belonging to the *subtilis* group (IV) and a species of *Pseudomonas* (V). The latter, however, was not identical with *Pseudomon. liquefaciens*.

Two cocci were present in limited quantities. These corresponded most closely to *Micrococcus aurantiacus* (VI) and *Micrococcus candidans* (VII).

IV, VI and VII were almost entirely absent at 37°.

When pourings were made with agar prepared with beer wort and flax-straw extract, two strains of *yeast* also occurred. The number of yeast cells, however, was insignificant in comparison with the number of bacteria.

In view of the fact that the organisms described above were isolated from laboratory rettings, where the conditions differed in some respects from those prevailing on the industrial scale (especially in the effect of atmospheric oxygen), it was considered advisable to make several complementary experiments with retting liquor from one of the retteries. A series of samples of retting liquor were obtained in the autumn of 1944 from the flax rettery in Växjö. Some of these were taken at various phases of the same ret, and some from rets under different conditions. The samples proved to contain largely the same bacteria as were found in the laboratory rets, i. e. chiefly the »paracoli» strains and the two species of *Micrococcus*, often accompanied by *Bac. subtilis*.

On the pour plates made from the Växjö samples bacterial counts were made in the hope that the total number of bacteria in the subsidiary flora, or the relative quantity of one or the other species, would reflect variations in the retting process. However, the counts showed only that species I was always dominant, while the other species appeared more or less sporadically. The number of bacteria of species I could also vary during the different phases of the retting in a manner that can hardly be ascribed to the retting process, but is rather to be associated with the method of sample-taking, which cannot be performed as reproducibly in a retting vat as in a smaller vessel in the laboratory.

## 2. The Function of the Subsidiary Flora.

According to STÖRMER the subsidiary flora plays an important part in that it consumes atmospheric oxygen dissolved in the retting liquor, whereby the redox potential of the liquid is lowered and more favourable conditions are created for the anaerobic, pectin-degrading

bacteria. STÖRMER also maintains that the subsidiary flora oxidizes a part of the acetic acid formed in the retting. Butyric and valeric acids are supposed, however, not to be attacked.

RUSCHMANN (1923) divided the retting process from the biological viewpoint into a preliminary phase and a main phase. In the course of the former the subsidiary flora becomes strongly developed and converts dissolved carbohydrates to organic acids. Only when the carbohydrate fermentation has been concluded do the true retting bacteria undergo any considerable development.

### Experimental.

A large number of rettings were carried out without changing the water at the commencement of the process. It was thought that under these conditions the influence of the extractive substances would be strongly manifested. RUSCHMANN'S preliminary phase, in so far as it is characterized by a very insignificant activity on the part of the pectin-fermenters and a high formation of acid by the subsidiary flora, must be regarded as a fiction, provided that the retting is allowed to proceed at 30–40° C. *The ratio butyric acid: other acids after 20 hours* was already at the same level as during the whole of the subsequent retting period, when the acids were formed almost exclusively from the pectin substances (see table, p. 336). The immediate pectin degradation (cf. p. 333), in addition to the constant ratio between the quantities of butyric acid and other acids during the entire retting period, showed that the amylobacteria, including the pectin-fermenters, commenced their activity at as early, or almost as early, a stage as the other microorganisms and contributed to the fermentation of carbohydrates in the extractive substances.

The *acid-consumption* of the subsidiary flora in the presence of atmospheric oxygen is easy to demonstrate, especially in rets where the retting liquor is subjected to artificial aeration, but also in small-scale experiments in beakers, in which the free liquid surface, and hence the admission of air, is greater than in vat-retting.

Table 1 shows that the quantity of acids present and formed in the retting liquor during the first phase of the ret rapidly decreases if the straw is removed after extraction.

In a ret at 35° with 3 kg of straw and 60 litres of water, aeration was commenced at the rate of 550 litres of air per hour at the time corresponding to complete retting (69 hours). The acid equivalent fell as is shown in Table 2.

*Table 1.*

Decrease in the acid equivalent when the straw is removed from the retting liquor during the ret.

Beaker experiment.  $f = 1:15$ . Temperature  $35^{\circ}\text{C}$ .

(Acid equivalent determined without boiling under reflux.)

Straw removed after 10 hours.

Time in hours	pH	Acid equivalent
10	5.54	2.75
22	5.18	3.26
34	5.58	0.81
46	6.02	0.70
58	6.43	0.08

Acid equivalent = ml 0.1 N alkali per 50 ml sample when titrated to pH 9.0.

*Table 2.*

Decrease in the acid equivalent on aeration.

Time in hours	Acid equivalent
69 <sup>1</sup>	12.20
73	11.80
75	11.70
93	0.75

<sup>1</sup>  $\frac{1}{3}$  of the straw was removed for special tests.

*Table 3.*

Relative proportions of the acids before and after aeration of the retting liquor.

	Relative percentage proportions of acids	
	before aeration	after aeration
HAc (+ HFo) <sup>1</sup> .....	76.1	12.5
HPr .....	0	0
HBu .....	23.9	87.5
HVa .....	0	0
	100.0	100.0

<sup>1</sup> The following abbreviations have been employed throughout for the acids:

Formic acid	HFo	Butyric acid	HBu
Acetic acid	HAc	Valeric acid	HVa
Propionic acid	HPr	Lactic acid	HLa

The effect of the aeration was that the total content of lower fatty acids in the retting liquor fell from 0.02506 equiv./l. to 0.00673.<sup>1</sup> The ratio of the acids before and after aeration is shown in Table 3.

*Butyric acid* was present before aeration in the concentration 0.00599 and after aeration 0.00589 equiv./l., i.e. it was not consumed during the aeration period, which is concordant with the finding of STÖRMER that the subsidiary flora attacks acetic acid but not butyric acid.

When the aeration was started it appeared that the activity of the pectinifermenters was broken off, since after 93 hours the flax was not over-retted, as would otherwise have been the case.

### III. Attempts to Follow the Retting Process by Simple Analyses of the Straw and the Retting Liquor.

As the greater part of the substances that are removed from the straw in the course of the retting, are recovered from the retting liquor in a more or less altered form, the progress of the retting can be followed by analyses of both the retting liquor and the straw. In view of the heterogeneity of the latter material, the retting liquor is preferable as an object for such analyses.

A systematic investigation of these matters has been commenced in recent years by LÜDTKE (1938, 1940).

#### Experimental.

##### *Apparatus.*

Four types of retting vessel were employed:

(a) 1.5-litre preserving jars, usually containing 60 g flax straw (in lengths of 10 cm) and 1200 ml water. The test bundles were made up of pieces of as near as possible equal thickness from the central part of the stalk.

The retting could be performed both aerobically and anaerobically in such preserving jars. The risk of infection was reduced in certain cases by the use of pervorated lids with plugs of cotton-wool. The lids were fixed by means of clamps and the jars with their contents were sterilized in the autoclave. The risk of infection is greater when

<sup>1</sup> Titration after boiling off CO<sub>2</sub> under reflux and steamdistillation (distillate with volume 20 times that of original solution).

ordinary, unperforated lids are employed. In this case reduced pressure prevails in the vessels and non-sterile air is inevitably sucked in on opening.

(b) 5-litre glass beakers, covered loosely with inverted glass dishes, and usually containing 290 g straw and 4350 ml water (volume ratio 1 : 15). The straw was used in lengths of 23 cm, which were selected in the same manner as in (a).

These beakers were placed in ordinary small bacteriological incubators. The retting process was, however, affected by the relatively large surface of contact with air in proportion to the volume. Hence, in beaker-rets, we obtained smaller quantities of acid than in experiments on a larger scale.

(c) A tube of acid-resistant sheet-metal, provided with an arrangement for aeration (Jena glass filter 25 G 3) under a wooden rack upon which the straw rested. The apparatus was usually charged with 3 kg straw and 45–60 l water. The temperature was controlled by means of an electrical hot-plate regulated with a contact thermometer and a relay. This hot-plate was placed beneath the apparatus.

(d) An acid-resistant sheet-metal vessel for 6 kg straw.

Only in the cases (c) and (d) were conditions attained which approximated to those prevailing in industry, so that a direct comparison could be made. When retting was carried out in the smaller vessels the straw had to be cut into small pieces. The surface of contact with the air was too great in the beaker-rets. However, the rets in preserving jars under anaerobic conditions yielded satisfactory results with respect to the development of *B. felsineus*.

### *Analyses.*

The following determinations were carried out on the retting liquor: *pH* was measured potentiometrically.

*Acid equivalent*: ml 0.1 N alkali per 50 ml sample, titrated to pH 9.0. CO<sub>2</sub> was removed before the titration by boiling under reflux.

*Volatile acids*: 50 ml samples were acidified with H<sub>3</sub>PO<sub>4</sub> and steam-distilled, the distillate being titrated against phenolphthalein. In determinations of the individual acids by shaking out with isopropylether, larger samples of retting liquor were employed and the procedure mentioned on p. 336 was adopted.

*Reducing substances* were determined by the method of SCHOORL without previous hydrolysis.

*Methanol* was determined according to v. FELLEBERG by oxidation with KMnO<sub>4</sub>.

*Pectin in the straw:* 1–2 g ground flax straw was extracted for one hour with acetone in the apparatus of HAANEN and BADUM (filter 55 G 3). The material was then washed 6–8 times with distilled water, after which the filter-crucible was placed in a beaker containing 0.5 % HCl which was allowed to act for one hour at room temperature. After sucking off, the residue was washed with water and finally several times with methanol.

For the dissolution of *A-pectin* (LÜDTKE) the straw was transferred to a beaker and treated with 50 ml 0.5 % ammonium oxalate solution. The beaker was allowed to stand for 30 minutes on a boiling water-bath. The material was sucked off on a glass filter (G 3), washed with hot ammonium oxalate solution and finally with boiling water. The filtrate was filtered again through paper and evaporated down *in vacuo* until crystals of oxalate began to separate. 96 % ethanol, containing 12 ml HCl per litre, was added, so that the ethanol content became 70 %. The pectin thus precipitated was permitted to stand for one hour, after which it was separated upon a weighed filter-crucible (G 4), washed with 70 % ethanol (without HCl) and finally three times with ether, dried for 3 hours at 70° and weighed.

*B-pectin.* The residue from the extraction of the *A-pectin* was transferred to a conical flask. 50 ml oxalate solution was added, and the mixture was autoclaved for 30 minutes at 115°. The procedure was then the same as in the determination of *A-pectin*.

### *Retting Experiments.*

The following values illustrate how the analytical results may be for rets under different conditions:

In these experiments, as in most of the other rets, the water was not changed before the commencement of the actual retting process, in order that the products might be obtained in as high concentrations as possible.

In the following experiments the pectin determinations were performed on samples of straw removed from the batch.

The last experiment shows that the dissolution of pectin and the formation of acid correspond to one another, which confirms that the retting process is principally a pectin-fermentation. The pectin dissolved out from the straw is rapidly degraded, since the acid curve shows no lag in relation to the pectin curve. At the time when the retting is complete, the rapid pectin-degradation prevailing during the main phase of the retting has been succeeded by a slow »after-fermentation«. The pectin content then falls slowly and the time required

Table 4.

pH, acid equivalent, volatile acids and reducing substances during various phases of a beaker-ret at 37° C.

$f = 1:15$

Time in hours	pH	Acid equivalent	Volatile acids as HAc g/l	Reducing substances as glucose g/l
6	6.4			0.46
12	5.3			
24	5.1	7.3	1.09	0.12
36	5.0	9.5	1.55	0.04
48	4.8	12.9	2.46	
60	4.7	16.4		
72 <sup>1</sup>	4.6	18.8	2.76	
84	4.7	17.2		
96	4.5	17.3	2.89	
108	4.6			
120	4.5	16.6	2.55	

<sup>1</sup> Flax completely retted. The time of complete retting was always determined on dried samples and was considered to have been reached when the bast on breaking, readily loosened from the wood in the form of fibre bundles.

Table 5.

pH, acid equivalent, volatile acids and reducing substances during various phases of a beaker-ret at 30 °C.

Beaker experiment.  $f = 1:40$ . Temperature 30 °C.

Time in hours	pH	Acid equivalent	Volatile acids as HAc g/l	Reducing substances as glucose g/l
6	6.9			0.30
12	5.8			
24	5.2	2.9		0.08
36	5.1		0.58	0.01
48	4.9	4.1	0.69	
60	4.8			
72	4.7	5.3	0.86	
84 <sup>1</sup>	4.8			
96	4.7	5.0	0.83	
108	4.8			
120	4.7	5.4	0.92	

Retting complete.

Table 6.

pH, volatile acids, methanol and A-pectin (in the straw) in a ret on the semi-industrial scale (60 l).

Spontaneous retting in the sheet-metal tube with 3 kg flax straw and 60 l water.  
Temperature 37° C.

Time in hours	pH	Volatile acids as HAC g/l	Methanol in retting liquor, mg/l	% A-pectin in straw
0				4.10
6	5.5	0.14	11.8	
14	5.22	0.59	25.0	3.56
18	5.08			
22	4.77	0.65	28.5	3.25
30	4.73	0.97	39.0	2.95
38	4.64	1.25	46.5	1.96
46	4.59	1.45	44.0	1.15
54	4.54	1.52		0.97
62 <sup>1</sup>	4.46	1.55	44.5	0.72
70		1.60		0.65
74		1.64		0.70
96	4.47	1.70	44.5	0.60

Retting complete.

Table 7.

pH, volatile acids, methanol, A- and B-pectin (in straw) in a ret on the semi-industrial scale (120 l). Cf. figure.

Large apparatus.  $f = 1:20$ . Temperature 37° C. Inoculation with 2 % felineus culture.

Time in hours	pH	Volatile acids as HAC, g/l	Methanol in retting liquor, mg/l	% A-pectin in straw	% B-pectin in straw	Sum of A- and B-pectin %
0				2.70	1.72	4.42
8	4.99	0.78	10.0	2.46	2.00	4.46
16	4.86	0.93	18.0	2.18	1.31	3.49
24	4.66	1.44	26.0	1.57	1.06	2.63
32	4.51	1.89	58.0	1.08	0.99	2.07
41	4.51	2.22	75.0	0.95	1.01	1.96
48	4.47	2.37	62.5	0.99	0.64	1.63
56	4.44	2.41	68.5	0.90	0.45	1.35
64 <sup>1</sup>	4.38	2.50	63.3	0.84	0.34	1.18
114	4.35	2.88		0.40	0.35	0.75

<sup>1</sup> Retting complete.



for complete fermentation of the total pectin content appears to be very long. The division of the pectin into A- and B-pectin has little practical import as regards judging the progress of the retting: the sum of A- and B-pectins gives a better picture.

LÜDTKE maintains that the lowest pH and the highest acid equivalent in his experiments always coincided with the end-point of the ret and could thus serve as an objective indicator of this. Such, however, did not appear to be the case in the author's experiments. At all events, the pH and the acid equivalent can scarcely be of practical importance for determining a suitable time for *breaking off* the retting: the curves showing these factors as functions of time are too flat to permit a sufficiently rapid observation of the maxima.

It should be possible, as far as the retting liquor is concerned, to employ *pH*, *acid equivalent*, *content of volatile acids* and possibly *methanol content* as indicators of the progress of the retting. A further possibility is the *determination of pectin* in the straw. Such determinations, however, are presumably too laborious to be applicable other than in laboratory experiments of a fundamental nature. The same applies to the determination of *the individual acids*; it is admittedly possible to determine the approximate ratio HAC: HBU with comparative ease and rapidity by the partition method, but the limits of error are quite wide.

Determinations of the permanganate consumption and conductivity of the retting liquor and of the nitrogen content of the flax straw gave values which were not related in any characteristic manner to the retting process.

#### IV. Formation of Acid in the Retting.

Our knowledge of the volatile acids formed in the retting of flax has progressively increased and is now probably almost complete. The evidence originally presented for the occurrence of certain of the acids, however, must be regarded as unconvincing, since in the determination the Duclaux distillation procedure was principally employed. This is very unreliable in the present case where five acids are present in the mixture.

In 1904 STÖRMER investigated the formation of *carbon dioxide*, *acetic acid* (HAC), *butyric acid* (HBU) and *valeric acid* (HVA). This author also established the presence of small quantities of the non-volatile acids *lactic acid* (HLA) and *succinic acid*.

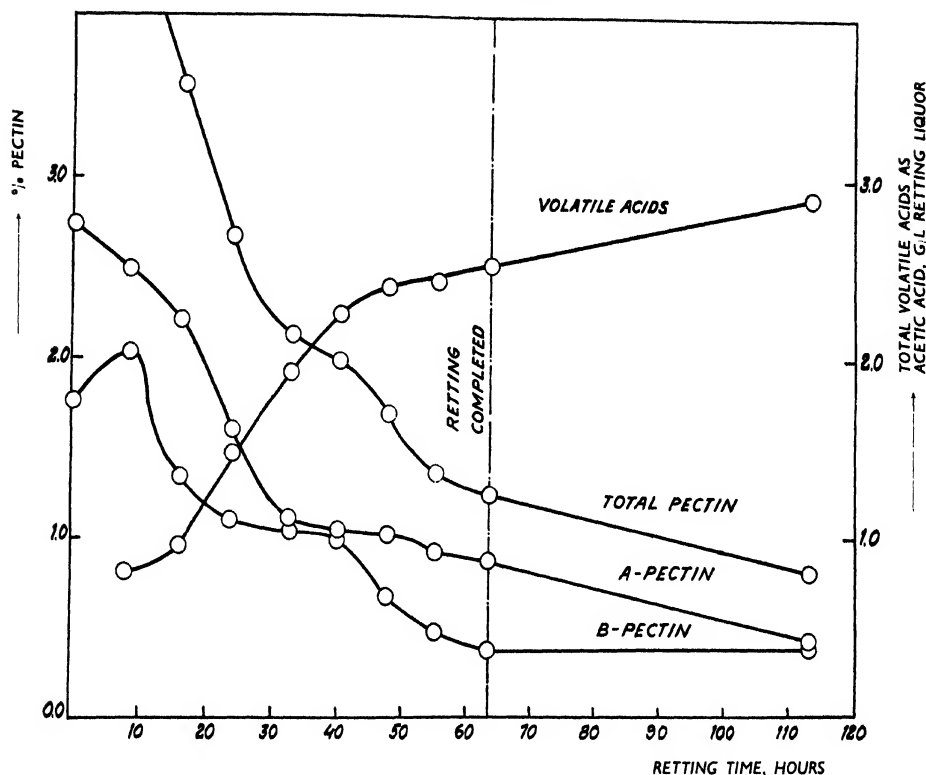


Fig. 2. Curves for some analytical values during a ret. Cf. table 7.

HABERMANN (1921) found, in addition to the acids mentioned above, *formic acid* (HFO). This, however, was detected only in dried straw, which in the majority of cases contained only HFO and HAc. The higher fatty acids, which can be distilled over more readily with steam, had here been removed during the drying process, so that it was possible to demonstrate the presence of HFO by Duclaux distillation.

RUSCHMANN (1923) maintained that HAc was predominant during the biological preliminary phase. The retting liquor also contained HLa, HFO, HVa and HBU. The latter according to RUSCHMANN, first occurred in large quantities during the main phase. HLa, HFO and HVa could be detected only in small quantities.

LÜDTKE (1940) also mentions propionic acid (HPr) among the volatile acids which are formed in the retting of flax.

It is hence necessary to reckon with the simultaneous presence of the five lowest fatty acids in smaller or larger quantities during the

retting process. The difficulties in estimating these acids separately are therefore considerable.

### Experimental.

Since the lower fatty acids are considered to be the principal products in the fermentation of flax pectin, the author thought that it would be of interest to investigate whether they actually were present and in what proportions. For this purpose the partition method developed by BEHRENS, WERKMAN et al. (cf. OSBURN, WOOD and WERKMAN (1936)) was employed in a modified form (not yet published), which permitted a more accurate determination than the original procedure.

#### *Formation of Acid at Different Times During the Ret.*

In one of the rets in the large apparatus the following values were obtained for the acid formation at different times during the process:

Table 8.

Acid formation at different stages of a ret on the semi-industrial scale (120 l).

$f = 1:20$ . Temperature  $35^{\circ}\text{C}$ .

	20 hours		48 hours		72 hours	
	g/l	%	g/l	%	g/l	%
HFo	0.021	4.4	0.014	0.9	0.017	0.8
HAc	0.265	55.2	1.004	60.9	1.284	58.9
HPr	0.023	4.8	0.121	7.3	0.157	7.2
HBu	0.154	32.1	0.510	30.9	0.722	33.1
HVa	0.017	3.5	0.00	0.0	0.00	0.0
Total	0.480	100.0	1.649	100.0	2.180	100.0

Only HAc, HPr and HBu were found to be of any quantitative significance towards the conclusion of the retting.

In opposition to what RUSCHMANN thought to be the case, the formation of HBu was proportionally as intense at the commencement of the ret as towards its conclusion (cf. p. 327).

Table 9 shows the proportions of the different volatile acids in the retting liquor during four different rets on the 120-litre scale. In I, III and IV the analyses were performed at the conclusion of retting (after 72 hours), while in II the retting was only  $3/4$  completed.

Table 9.

Relative proportions of the different acids in some spontaneous rets.

(120 l).

Retting	Weight per cent				
	HFo	HAc	HPr	HBu	HVa
I	0.9	61.5	6.0	32.5	0.0
II	0.9	59.0	6.5	34.5	0.0
III	0.5	62.2	6.6	29.9	1.3
IV	0.6	62.2	6.7	29.9	1.2
Mean	0.7	61.2	6.5	31.7	0.6

*Fermentation of Flax Pectin.*

According to certain reports, *B. felsineus* forms larger quantities of acids in the retting than does *Gr. pectinovorum*. The former organism, moreover, is said in certain cases not to form butyric acid. If this last statement were true, it should be possible, by means of a determination of HBu, to establish the relative activities of *pectinovorum* and *felsineus* in spontaneous retting. The reliable and comparatively swift determination of acid would hence be capable of replacing the uncertain and tedious bacteriological analysis.

In order to elucidate this matter, the author fermented a flax pectin of the highest attainable purity with pure cultures of *Gr. pectinovorum* and *B. felsineus*. In these experiments the influence of the subsidiary flora was completely eliminated, in addition to which the directly extractable substance was completely lacking. The experiments are therefore to be regarded as a »purer» pectin fermentation than that which takes place in the fermentation of flax straw in its original state.

The flax pectin was prepared in the following manner:

0.5 kg flax straw, cut into pieces of about 0.5 cm length, was extracted for one hour with acetone in an enameled saucepan at boiling temperature. The straw was sucked off, washed several times with acetone, frequently with water, and allowed to stand for one hour with 0.5 N HCl. After the straw had been sucked off and washed thoroughly, 5 l of warm 0.5 % ammonium acetate solution was added and the mixture was heated for 30 minutes at 80°. After filtration, the liquid was cleared by passing it through kieselguhr, evaporated down *in vacuo* to about one litre and precipitated with alcohol containing 12 ml conc. HCl per litre, so that the final concentration of alcohol was

about 70 %. The precipitated pectin was washed with 70 % alcohol on a Jena G 3 filter until the washings were free from chloride and oxalate. The material was washed with warm 70 % alcohol and finally with ether, after which it was dried overnight at 50°. The yield was about 10 g.

The fermentation was carried out in preserving jars with 350 ml of the following nutrient solution:

(NH <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> .....	2 g per l
KH <sub>2</sub> PO <sub>4</sub> .....	1 » » »
CaCl <sub>2</sub> ·6 H <sub>2</sub> O.....	0.1 » » »
MgSO <sub>4</sub> ·7 H <sub>2</sub> O.....	0.3 » » »
NaCl.....	0.1 » » »
FeCl <sub>3</sub> · 6 H <sub>2</sub> O.....	0.01 » » »
Cellulose <sup>1</sup> .....	10.0 » » »
Pectin.....	20.0 » » »

The pH was adjusted to 7.0 with NaOH.

The nutrient solution, without pectin, was sterilized for one hour at 120°. After the addition of the pectin, the steaming was continued for a further 25 minutes. This sterilization was shown to be adequate by the fact that an uninoculated sample of the solution showed no sign of fermentation when kept at 37°.

The cooled solution was inoculated with 30 ml of a seed culture of *Gr. pectinovorum* (carrot culture) or of *B. felsineus* (potato culture), together with *Sacch. logos* from an agar slant. A tube containing pyrogallol potash was inserted in the vessel, which was then evacuated and kept at 37°. After 5 days the analysis was performed. The solid

Table 10.

Fermentation of flax pectin with pure cultures of *Gr. pectinovorum* and *B. felsineus*.

Formed per 100 g pectin	Inoculated with	
	<i>Gr. pectinovorum</i>	<i>B. felsineus</i>
Methanol, g .....	0.8	0.0
HFO, g .....	0.4	0.0
HAc, » .....	24.2	33.8
HPr, » .....	0.0	0.0
HBu » .....	7.2	• 7.4
Total of acids formed, g	31.4	41.2
Ratio HAc : HBu .....	3.3 : 1	4.6 : 1

<sup>1</sup> As carrier for the bacteria.

components of the mixture were centrifuged off and treated with 0.5 % ammonium oxalate. When alcohol was added to the oxalate solution no pectin precipitate was formed, but only an insignificant sediment.

Hence *B. felsineus* also formed considerable quantities of HBu in the fermentation of pure pectin, so that the prospects of determining, by analysis of the acids, the relative degrees of retting by *felsineus* and *pectinovorum*, appear to be rather small.

The total quantity of acids formed was greater in the *felsineus* fermentation, which is concordant with previous reports in the literature.

It is a matter of theoretical interest that HPr and HVa are not formed in the fermentation of pure pectin (cf. p. 340 with regard to the probable origin of HPr).

### *The Occurrence of HPr in the Fermentation of Pectin.*

In each of a series of preserving jars were placed 60 g flax straw and 1 200 ml water. The jars were kept at 35°. After 24 hours the retting liquor was decanted off and replaced with water at 35°. The jars were allowed to stand for 45 minutes, after which the liquid was replaced with fresh water, which in turn was immediately exchanged for 1 200 ml nutrient salt solution of the following composition:

#### *Experiments 1-3.*

Asparagine. 1 H <sub>2</sub> O.....	5 g per l
KH <sub>2</sub> PO <sub>4</sub> .....	1 » » »
CaCl <sub>2</sub> . 6 H <sub>2</sub> O.....	0.1 » » »
MgSO <sub>4</sub> . 7 H <sub>2</sub> O.....	0.3 » » »
NaCl.....	0.1 » » »
FeCl <sub>3</sub> . 6 H <sub>2</sub> O.....	0.01 » » »

#### *Experiments 4-6.*

Same as in 1-3, but with the asparagine replaced by the corresponding amount of (NH<sub>4</sub>)<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>.

6 g of compressed yeast was also added to each jar. The air above the liquid surface was replaced with CO<sub>2</sub> and the jars were hermetically sealed and kept at 35°.

The initial partial retting and the exchange of liquid removed by far the greater part of the extractive substances and their conversion products. The acids formed after the exchange of liquid in the retting proper should thus have derived largely from the material not directly extractable with water, i.e. principally pectin, and also asparagine in experiments 1-3.

The experiments were broken off after a total time of 96 hours, when the flax proved to be completely retted. 1 150 ml of solution per jar could be decanted off.

The decanted liquid had the following mean contents when the retting was interrupted:

*Table 11.*

Retting of extracted straw, with and without addition of asparagine.

	With asparagine		Without asparagine	
	g/l	%	g/l	%
HAc (+ HFo) ..	1.35	40.3	0.72	60.0
HPr .....	1.49	44.5	0.07	5.8
HBu .....	0.51	15.2	0.41	34.2
HVa .....	0.0	0.0	0.0	0.0
Total	3.35	100.0	1.20	100.0

It will be seen that the addition of asparagine brought about an increase in the acid formation of over 2 g acid per litre, of which HPr constituted the greater part. It is therefore reasonable to explain the formation of HPr in spontaneous retting without previous leaching as due to the degradation of amino acids (possibly from proteins), especially as HPr is not formed in the fermentation of pure pectin.

*Relative Quantities of Acids in the Retting Liquor and the Press Fluid.*

It has been maintained that the relative quantities of acids are different in the stalk and in the external liquid. From the results of one of his experiments, HABERMANN (1921) gives the molar ratio HAc: HBu as 41 : 10 in the retting liquor and 85 : 10 in the wet, retted straw. On the other hand, HERZOG states that the press-fluid contains 6-10 times as much HBu as the retting liquor. This latter author,

*Table 12.*

Relative percentage proportions of acids in retting liquor and press-fluid.

	Retting liquor	Press-fluid
HAc (+ HFo) ..	76.1	77.0
HPr .....	0	0
HBu .....	23.9	23.0
HVa .....	0	0
	100.0	100.0

however, gives no information concerning the retting procedure or the total acid content of the stalks (cited from HABERMANN).

It is obvious that the *total acid content* may be greater inside than outside the stalk as a consequence of delayed diffusion.

In a retting carried out in the sheet-metal vessel described on p. 330, we obtained the quantities of acids after 69 hours (completed retting), which are given in table 12.

It will be observed that no difference could be detected between the retting liquor and the press-fluid.

## V. The Effects of Various Factors upon the Retting Process.

### 1. Influence of pH on the Retting.

The question of the extent to which the pH of the retting liquor influences the activity of the flax-retters is of great practical importance, since pH is one of the factors that it should be possible to regulate in industry without excessive cost. In the spontaneous retting the pH falls from an initial value of 6–7, or perhaps somewhat higher, to a value in the neighbourhood of 4.5. This decrease is due to the acids formed in the fermentation of the pectin (especially CO<sub>2</sub>, HAc and HBu), although the formation of lactic acid from soluble carbohydrates also plays a certain part. As lactic acid is a stronger acid than the other three compounds mentioned, it contributes in a specially high degree to the reduction of pH.

In an article dealing, among other things, with the significance of the pH of the water employed in the retting, STOLLENWERK and MENKE (1938) appear to have misinterpreted certain of their results. They found that a surface water rich in humus and with low pH gave more rapid retting than, for example, tap water of higher pH, and for this reason considered it advisable to lower the pH from the beginning by the addition of a small amount of acid to the retting water. In the experiments illustrating the superiority of the surface water (initial pH 5.0–6.2) over the tap water (initial pH 7.8), the pH during the retting was read for the former as 4.9–5.0 and for the latter 4.3. At the completion of retting, however, the pH had again risen to 5.3. During a part of the retting period the pH in the ret with tap water had lain below 5, i.e. *below the most favourable range* (see below). The results obtained by the authors may have been entirely conditioned by this circumstance.



### Experimental.

In analogy with the experiments of STOLLENWERK and MENKE, rets were made with fixed *initial* pH values in the following manner:

The rettings were carried out in 5-litre beakers,  $f = 1:20$ . After 6 hours at  $35^\circ$  the liquid was decanted off and replaced with fresh water, which in its turn was substituted with buffer solutions after 30 minutes. The buffers, which were made from  $M/30 \text{ KH}_2\text{PO}_4$  and  $\text{Na}_2\text{HPO}_4$ , were adjusted to pH 5, 6 and 7. The rets were performed in duplicate. Compressed yeast (1 g per l) was added to replace the flora removed in the changes of liquid.

Table 13.

Rets at different initial pH values.

Initial pH	pH after			No. of hours for complete retting
	60 hours	84 hours	108 hours	
5.0	4.54	4.50	4.57	84
6.0	4.64	4.55	4.56	84
7.0	5.20	5.05	5.04	66
Blank	4.52	4.38	4.38	84

The retting proceeded most rapidly when the initial pH was 7, which indicates that *the pH range 5-7 is more favourable for the flax-retters than are lower values.*

In view of the low buffering capacity of the phosphate buffer at pH 5-6, the pH must have fallen quite rapidly below 5 in the rettings with this initial value. This explains why the retting time in this case was about the same as that found with initial pH 5. In experiments designed to fix certain pH intervals throughout the ret, *citrate buffers* were employed pH minimum was found to lie between 4.0 and 4.5 and pH-maximum at 6-7.

Further details of the optimum pH range are given on pp. 343 and 345.

## 2. The Inhibitory Action of the Fatty Acids.

It is occasionally maintained that the acids formed in the retting, especially HBu, inhibit the retting process. In the experiments to be described, where different quantities of HAc and HBu were added before the retting, no specific inhibition by these acids was observed. The inhibitory action which was brought about in certain cases by

addition of acid, may be regarded as wholly due to the simultaneous change of pH (cf. above). It should be noted that the amounts of acid added were considerably greater than those formed in a normal spontaneous retting. In vessels where the pH was higher than normal, the retting proceeded at a somewhat higher rate than in the blank experiment. An initial pH of 4.5 delayed the retting, as was to be expected.

### Experimental.

In view of the pH-effect demonstrated earlier, it was desirable to distinguish, if possible, a specific acid effect from the pH effect. The retting liquor was therefore adjusted to three different pH values for each quantity of acid with caustic soda and the respective acid (see table below).

The straw was first allowed to stand with water ( $f = 1 : 20$ ) for 6 hours at  $35^{\circ}$ , after which the solution was decanted off and fresh water added. This was exchanged in turn for nutrient salt solution

Table 14.

Effect of fatty acids upon the rate of retting.

HAc g/l	0 hours pH	60 hours	Degree of retting at 60 hours
3.0	4.50	4.62	XXX
3.0	5.47	5.22	XXX(X)
3.0	6.52	5.31	XXXX
7.5	4.45	4.61	XXX
7.5	5.55	5.53	XXX(X)
7.5	6.50	5.78	XXXX
HBu g/l	0 hours pH	60 hours	Degree of retting at 60 hours
1.0	4.52	4.75	XXX
1.0	5.47	4.93	XXX(X)
1.0	6.56	4.98	XXXX
2.5	4.49	4.66	XXX
2.5	5.45	5.13	XXX(X)
2.5	6.43	5.23	XXXX
Blank (without acids)	5.88	4.62	XXX(X)

Degree of retting: X incipient retting  
XXXX complete retting

Table 15.

Effect of glucose addition upon the retting rate.

Glucose added g/l	0 hours	17 hours		39 hours		64 hours		93 hours	
	pH	pH	glucose g/l	pH	glucose g/l	pH	glucose g/l	pH	glucose g/l
1.0	7.10	4.90	0.70	4.62	0.06	4.55	0.12	4.46	0.12 <sup>1</sup>
	6.85	4.66	0.04	4.54	0.07	4.47	0.12	4.41	0.14 <sup>1</sup>
2.5	7.00	4.66	1.72	4.18	0.45	4.17	0.12	4.37	0.14 <sup>1</sup>
	7.20	4.80	1.86	4.27	0.73	4.15	0.12	4.35	0.06 <sup>1</sup>
5.0	7.05	4.54	3.52	4.13	2.62	3.82	1.60	3.88	0.10 <sup>2</sup>
	6.95	4.57	4.10	3.97	2.98	3.82	1.72	3.80	0.10 <sup>2</sup>
Blank with nutrient solution	6.85	5.26	—	4.57	0.02	—	0.10	Fully retted at 70 hours	
Blank with water	—	—	—	4.55	—	4.46	—	Fully retted at 64 hours	

<sup>1</sup> Fully retted at 93 hours.<sup>2</sup> Still badly retted at 93 hours.

Table 16.

Comparison between volatile acids and lactic acid for different additions of glucose.

Glucose added g/l	Total volatile as HAc acids g/l	HLa g/l
2.5	1.075	0.112
5.0	0.918	0.470

(see p. 338) after 30 minutes. By this leaching process the retting was made into a relatively pure pectin fermentation.

It will be seen from the table that the retting time was independent of the quantity of HAc or HBu added. At the higher pH values it seems probable that the acetate and butyrate accelerated the retting by a buffering action (time for complete retting only 60 hours).

### 3. Retting Experiments with Addition of Glucose.

According to RUSCHMANN, STOLLENWERK and MENKE, and other workers, the degradation of pectin, i.e. the main phase of the retting, commences only after the soluble sugars have been consumed. This opinion is, however, open to discussion, in view of the immediate

rapid fall in the pectin curve at the commencement of the ret (cf. p. 333). The following experiments with addition of glucose show another effect produced by this substance, namely a reduction pH due to the formation of HLa, and a consequent retardation of the retting process.

### Experimental.

The experiment was carried out in a manner analogous to the experiment with acids (p. 343). After extraction for 6 hours, the same nutrient solution was added as in the acid experiment, together with different quantities of glucose in accordance with table 15.

An increase in the addition of glucose brought about a rise in the formation of HLa, which also follows from the strong reduction in pH caused by addition of 5 g glucose (table 16).

## VI. Inoculation Experiments with *Bacillus Felsineus*.

The discoverer of *B. felsineus*, CARBONE, prepared *felsineus* cultures for industrial use («Felsinozima») with the aid of potato substrate. The original instructions for the preparation of seed cultures to retting was by means of CARBONE's cultures stated that potato mash should be employed, and that it was unnecessary to boil this. The inoculation mixture consisted of potato mash, yeast and possibly chalk, to which Felsinozima had been added. The dissolved oxygen was consumed by the yeast, so that the strictly anaerobic bacterium developed despite the absence of a special anaerobic technique. It was stated that the inoculation mixtures should be made up three days before the actual ret, and should amount to 1 % of the weight of the flax straw (CARBONE and TOBLER (1922)).

Experience gradually gained with respect to the best manner of cultivating *B. felsineus* has shown, however, that the natural cycle of development of this bacterium is disturbed to some extent by the employment of potato mash, since the spore formation is thereby inhibited. It is therefore unsuitable to cultivate *B. felsineus* on potato substrate for long periods. In inoculation experiments on the semi-industrial scale carried out by WOLFSON and MURATOVA (1941) use was instead made of nettle substrates for the preliminary cultures and for certain of the seed cultures. For some seed cultures flax straw (probably unsterilized) and water were employed in the proportions 1 : 33. The quantity of seed culture amounted to between 10 and

15 % of the volume of retting liquor and was hence of quite a different order of magnitude to what CARBONE considered to be advisable.

WOLFSON and MURATOVA report that the retting time in the experiments mentioned could be reduced by 42 % by inoculation with *B. felsineus*. The yield and quality of the fibre were, however, the same as in the uninoculated control rum.

RUSCHMANN and BARTRAM (1943) have obtained good results in the inoculation of difficultly retted straw with *felsineus*. The retting time was appreciably shorter than in the corresponding experiments with *Gr. pectinovorum* and a lighter coloured fibre was obtained. This experiment was, however, made with sterilized straw on the laboratory scale and therefore has not the same bearing on industrial practice as the experiments of the Russian workers.

Table 17.

Experiments in inoculation with *B. Felsineus*.

Time in hours	pH				Acid equivalent				Degree of retting		Colour
	24	48	66	90	24	48	66	90	48	66	66
A. Spontaneous retting											
1 .....	4.81	4.50	4.43		4.0	6.7	9.8		xxx	xxx	normal
2 .....	4.92	4.54	4.45	4.33	3.1	6.8	9.9	12.40	xxx	xxx	normal
3 .....	4.92	4.50	4.38		3.0	7.5	10.1		xxx	xxx	normal
B. Addition of 10 % seed culture from potato substrate <sup>1</sup>											
4 .....	4.87	4.77	4.55		8.1	13.4	17.3		xxx(x)	xxxx	light
5 .....	4.95	4.77	4.65	4.60	8.3	13.6	17.2	19.4	xxx(x)	xxxx	light
6 .....	4.91	4.80	4.68		8.7	14.5	17.7		xxx(x)	xxxx	light
C. Addition of 10 % seed culture from flax straw <sup>2</sup>											
7 .....	4.66	4.42	4.41		7.6	12.8	14.8		xxx(x)	xxxxx	very light
8 .....	4.72	4.43	4.32	4.40	6.6	12.8	14.4	14.4	xxx(x)	xxxxx	very light
9 .....	4.70	4.47	4.40		5.9	11.1	13.0		xxx(x)	xxxxx	very light

<sup>1</sup> Three-day-old potato culture of *B. felsineus*. The total volatile acids were equivalent to 25 ml NaOH per 50 ml sample.

<sup>2</sup> Three-day-old flax culture without chalk (volume ratio 1 : 20) of *B. felsineus*

x very bad retting  
xxxx complete retting  
xxxxx over-retting.

### Experimental.

In the experimental series with addition of *B. felsineus*, glass tubes (internal diameter approx. 37 mm, length approx. 700 mm) fused at one end, were employed. The straw was carefully sorted, so that only stalks of about the same thickness were used. Only the central portion (in lengths of about 450 mm) was utilized. The volume ratio and the temperature were as in previous experiments. Each tube was closed with a bung of cotton-wool and a cap of aluminium foil (the latter to reduce evaporation).

This experiment demonstrated that inoculation with *B. felsineus* led to more rapid retting, and that flaxstraw cultures were more efficient than potato cultures. The results are remarkably unambiguous, being quite consistent within each group.

The straws inoculated with flax culture and potato culture were both of a lighter colour after retting than the spontaneously retted

Table 18.

Inoculation experiments with *B. felsineus* on difficultly retted flax straw.

	Tube No.	Degree of retting after			
		43 hours	50 hours	70 hours	98 hours
I. Spontaneous retting without inoculation	1				
	2	X	X	XX	XXXX
	3				
II. Inoculation with 10 % two-day spontaneous culture	4				
	5	X	X	XX(X)	XXXX
	6				
III. Inoculation with 10 % fully fermented felsineus flax culture + yeast	7				
	8	XXX(X)	XXX(X)	XXXXXX	XXXXXXXX
	9				
IV. Inoculation with 2 % two-day felsineus flax culture + yeast	10				
	11	X	X	XXX	XXXX(X)
V. Inoculation with 5 % two-day felsineus flax culture + yeast	12	X(X)	X(X)	XXX	XXXX(X)
	13				
IV. Inoculation with 10 % two-day felsineus flax culture + yeast	14				
	15	XXX	XXX	XXXX(X)	XXXXXX
	16				
VII. Inoculation with 20 % two-day felsineus flax culture + yeast	17	XXXX(X)	XXXXXX	XXXXXXX	
	18				

X very bad retting

XXXX complete retting

XXXXXX strong over-retting

material. The retting also commenced at an earlier stage in the tubes inoculated with *B. felsineus* (observed through the evolution of gas).

A further series of rets were carried out, where the so-called difficultly retted straw, obtained from Växjö, was employed. The conditions are given in table 18.

The following results, partly given in the table, are noteworthy:

(1) Addition of 20 %-2-day *felsineus* culture shortened the retting time by somewhat over 56 %. When 10 % of the same culture was employed, the corresponding figure was about 40 %. Concentrations of 5 and 2 % of seed culture, however, especially the latter, did not abbreviate the retting period to any considerable extent.

(2) When the inoculation was performed with 10 % of a 2-day spontaneous culture, the shortening of the retting time was quite insignificant.

(3) A »fully fermented» *felsineus* flax culture was somewhat more suitable for inoculation purposes than a 2-day culture, as will be seen on comparison of III and VI in the table.

(4) Inoculation with *felsineus* gave a retted fibre of a lighter colour in IV and VI. The material appeared, moreover, to be finer in texture.

## Summary.

The present work was intended as a general and basic investigation of the biological processes involved in the hot-water retting of Swedish flax. In view of the comprehensive research work in this sphere already carried out in certain other countries, a part of this investigation has been concerned with attempts to verify some of the information and results to be found in the relevant literature. At the same time, certain completely new results have been obtained, revealing new aspects of the problems concerned.

(1) An investigation of retting liquor and retted flax from Swedish retting plants with respect to the occurrence of *true retting bacteria* showed that *Bacillus felsineus*, Carbone et Tombolato (*Clostridium felsineum* (Carb. et T.) Bergey et al.) occurs at all plants in addition to *Granulobacter pectinovorum*, Beijerinck et van Delden. In plate cultures on agar-agar containing yeast water and glucose, however, more colonies were always obtained of *Gr. pectinovorum* than of *B. felsineus*. The ratio *felsineus* : *pectinovorum* varied greatly in different tests.

(2) The *subsidiary flora* showed a composition roughly corresponding to that found in other quarters. Three species were dominant, two of them belonging to the *coli group*, and the third to *Flavobacterium*. There also appeared, in smaller numbers, two types of *cocci*, corresponding to *Micrococcus aurantiacus* and *Micrococcus candicans*, one species of *Pseudomonas*, one species of the *subtilis group* and two species of *yeast*.

(3) In opposition to the findings of RUSCHMANN, the subsidiary flora appears to be of no great importance with respect to the appearance of volatile acids in the first phase of the retting process. The degradation of pectin commenced almost immediately and the ratio butyric acid : acetic acid, which constitutes a measure of the relative activity of the pectin fermenters, was already the same after 20 hours as at the conclusion of the retting. This indicates that the true retting bacteria commence their activity at a very early stage of the retting. Since the water-soluble carbohydrates are totally consumed in the first stage of the retting, there is reason to suppose, in view of the constancy of the butyric acid : acetic acid ratio, that the true retting bacteria are also principally responsible for the fermentation of the said carbohydrates. None of the species isolated from the subsidiary flora formed acid in retting liquor to a marked degree. The division of the retting process into a »preliminary phase» and a »main phase» therefore appears to be artificial, in so far as it is based on the assumption that the activity of the true retting bacteria commences only at the beginning of the »main phase», i.e. the period of the retting that is entered upon after the consumption of the soluble carbohydrates.

The *acid consumption* of the subsidiary flora could readily be detected. It was especially prominent when the retting liquor was submitted to moderate aeration. Only acetic acid was used up in this process, the butyric acid remaining almost completely unattacked.

(4) As part of a scheme to follow the retting process analytically the following factors have been determined in a number of rettings during different phases of the procedure:

In the retting liquor: pH, acid equivalent, content of volatile acids, sugar content and methanol content.

In the flax steams: »A»- and »B»-pectin (by a somewhat modified method of LÜDTKE & FELSER).

These experiments have shown that *pH*, *acid equivalent* and *volatile acids* are the most readily determinable indicators of the progress of the retting. The *pectin determinations* are too tedious to be applied with advantage except in experiments of a fundamental nature. The curves



for »A»-pectin in the straw and for volatile acids in the retting liquor corresponded so well that it was possible by determinations of the progressive increase in the acid content, to acquire a good estimate of the dissolution and degradation of the pectin. This may be carried out by determinations of the acid equivalent, although the content of volatile acids gives more reliable values since basic substances are also formed in secondary reactions during the retting. The pH curve, on the other hand, follows such a level course during the latter part of the retting process, that it gives no clear picture of the increase in the acid content.

When retting is complete, both the pectin and the acid curves show quite level courses. However, the degradation of pectin and the formation of acid proceed with reduced intensity long after the flax is fully retted.

(5) By means of a modification of WERKMAN's partition method, which permits greater accuracy than the original procedure, it has been established that *acetic acid*, *propionic acid*, *butyric acid* and *valeric acid* may be formed simultaneously in the retting. The presence of *formic acid* in the retting liquor has been established by oxidation of the distillate with  $\text{HgCl}_2$ . However, of the acids mentioned, only acetic acid and butyric acid appear to be of fundamental importance.

In the spontaneous retting of flax straw, acetic acid constituted c. 61 %, propionic acid 6–7 % and butyric acid c. 32 % of the total acid content.

When an addition was made of 5 g of asparagine per litre, an increase was brought about of over 2 g per litre in the total acid content. *Propionic acid* showed an especially great increase. As propionic acid is not formed in the fermentation of pure flax pectin, it is conceivable that the propionic acid formed in the retting process derives from asparagine or similar compounds.

In the fermentation of pure flax pectin with pure cultures of *B. felsineus* and *Gr. pectinovorum* values were obtained for the ratio acetic acid; butyric acid of 4.6 : 1 and 3.3 : 1 respectively (calculated on the weights of the acids). In the retting process the same ratio varied between 2 : 1 and 4 : 1. Rettings under similar conditions, however, gave approximately the same acid ratio. In the fermentation of pectin, *B. felsineus* gave an acid yield of 41.2 % and *Gr. pectinovorum* of 31.8 %.

In opposition to the findings of several previous workers, the ratio acetic acid: butyric acid was the same in the retting liquor and the press fluid from the flax stems when retting was complete.

(6) A number of experiments have been carried out regarding the influence of different factors on the velocity of the spontaneous retting. The *pH optimum* appears to lie above 5 and the *pH minimum* (adjusted with citrate buffer at the commencement of the retting) at between 4.0 and 4.5. It has not been possible to detect an inhibition by added acetic acid or butyric acid (as salts) either at pH 4.5 or 6.5. The influence of these acids on the course of the retting might be interpreted as a pure pH effect in accordance with the above. Addition of glucose brought about an increased formation of lactic acid, attended by a reduction in pH and a retardation of the retting.

(7) Experiments in inoculation with *B. felsineus* gave good results on the laboratory scale. Flax straw cultures gave better results here than did potato cultures. On one occasion seeding with 20 % *felsineus* cultures shortened the retting time from 98 to 43 hours and a 10 % culture to about 70 hours. 2 and 5 % cultures, however, did not abbreviate the time of retting to an appreciable extent. Fully fermented seed cultures were more effective than two-day cultures. The inoculated straw was considerably lighter in colour than the uninoculated.

The investigation described in the present work was carried out at the instigation of the Flax Preparation Committee of the State Flax Board, during the years 1943-1945, at the Department of Biochemistry of the Royal Institute of Technology. The necessary funds for the investigation were made available through the State Technical Research Board.

I would herewith express my gratitude, in the first place, to my teacher, and for many years my chief, Docent H. Lundin, for the interest with which he has followed the progress of this research.

Further, I would like to thank those who have shared in the, frequently tedious, experimental work on which the publication is based, more especially to Miss Sigrid Ekblom, engineer, Mr F. Berg, engineer, Mr S. Elliot, B. A., Miss Elisabeth Johnsson, engineer, and Mr G. Haglund, engineer.

## References.

- BITSCHKOVSKAJA, A. L. 1940. The role of *Bacillus felsineus* and *Granulobacter pectinovorum* in anaerobic flax retting. II. Mikrobiologija 9, 834-844.
- BREDEMANN, G. 1909. *Bacillus amylobacter* A. M. et Bredemann in morphologischer, physiologischer und systematischer Beziehung. Zbl. Bakt. Parasitenk. Abt. 2, 23, 385-568.
- CARBONE, D. & TOBLER, F. 1922. Die Rüste mit *Bacillus felsineus*. Faserforschung 2, 163-184.
- CLAUSEN, P. 1931. Studien über anaerobe Zellulosebazillen unter besonderer Berücksichtigung der Züchtungstechnik. Zbl. Bakt. Parasitenk. Abt. 2, 84, 20-60.

- HABERMANN, G. 1921. Der Säuregehalt des Röstflachses im nassen, künstlich und natürlich getrockneten Zustande. *Faserforschung* 1, 190–199.
- IMSCHENETZKIJ, A. A. 1939. Microbiology of anaerobic decomposition of cellulose. I. Isolation of pure cultures of thermophilic cellulosefermenting bacteria. *Mikrobiologija* 8, 129–141.
- KLEIN, G. 1932. Handbuch der Pflanzenanalyse. Band 2: Teil 1, 407.
- LÜDTKE, M. 1938. Untersuchungen über den Röstvorgang der Bastfaserpflanzen. [I.] *Angew. Chem.* 51, 143–146.
1940. Untersuchungen über den Röstvorgang der Bastfaserpflanzen. II. Mitteilung. Zur Kenntnis der Warmwasserröste im Flachs. *Biochem. Z.* 304, 56–72.
- LÜDTKE, M. & FELSER, H. 1941. Zur Kenntnis der Pektinstoffe II. Pektin A und B in Flachsstengel; Verhalten in Wasser- und Tauröstprozess. *Die Bastfaser* 1, 141–145.
- MARKOVA, Z. S. 1940. The role of *Bacillus felsineus* and *Granulobacter pectinovorum* in anaerobic flax retting. I. *Mikrobiologija* 9, 824–833.
- ORLA-JENSEN, A. D. & KLUYVER, A. J. 1939. Notiz über den Erreger der Warmwasserflachsröste in Holland. *Zbl. Bakt. Parasitenk. Abt. 2*, 101, 257–261.
- OSBURN, O. L., WOOD, H. G. & WERKMAN, C. H. 1936. Determination of Volatile Fatty Acids by the Partition Method. *Ind. Eng. Chem. Anal. Ed.* 8, 270–275.
- RUSCHMANN, G. 1923. Grundlagen der Röste. Leipzig.
- RUSCHMANN, G. & BARTRAM, H. 1942, 1943. *Bacillus felsineus* Carbone und seine Bedeutung für die Flachsröste. Mitt. 1–2. *Zbl. Bakt. Parasitenk.* 105, 326–351, 433–445.
- RUSCHMANN, G. & BAVENDAMM, W. 1925. Zur Kenntnis der Rösterreger *Bacillus felsineus* Carbone und *Plectridium pectinovorum* (*Bac. amylobacter* A. M. et Bredemann). *Zbl. Bakt. Parasitenk. Abt. 2*, 64, 340–394.
- STOLLENWERK, W. & MENKE, O. 1938. Die Wasserröste des Flachses mit normalem Wasser, Moorwasser und künstlich verändertem Wasser. Einfl. der W.-Beschaffenheit auf die Röste. *Lantw. Jb.* 86, 449–481.
- STUTZER, M. J. 1927. Die begleitenden Bakterien der Warmwasserröste der Flachses. *Zbl. Bakt. Parasitenk. Abt. 2*, 69, 164–178.
- STÖRMER, K. 1904. Über die Wasserröste des Flachses. *Zbl. Bakt. Parasitenk. Abt. 2*, 13, 171–185, 306–326.
- WOLFSON, I. A. & MURATOVA, M. A. 1941. Isolation and selection of cultures most active in anaerobic heat-retting of flax (II). *Mikrobiologija* 10, 234–235.

# A Note on Dr. Yngve Gustafsson's Paper: »Untersuchungen über die Strömungs- verhältnisse in gedräntem Boden»

By E. C. CHILDS

University of Cambridge, School of Agriculture, England

The above paper (GUSTAFSSON, 1946) contains the first published attempt to apply methods of rigid mathematical analysis, in particular hodograph transformations, to the solution of the problem of the water-table above a system of equidistantly spaced pipe drains in permeable land with incident rainfall or artesian water. In an earlier solution (WEDERNIKOV, 1936) the discussion was limited to a single open ditch, and no attempt was made to interpret the results in terms of an additional rainfall flux across the water-table. The very importance of Gustafsson's contribution, and the repercussions it is likely to have on the development of drainage theory, render it desirable that attention should be drawn, as early as possible, to the points at which the theory needs strengthening before it can take its place as the complete solution for which we are all waiting.

The hodograph (in the  $v_x, v_y$  plane) corresponding to the boundary of a drainage section (in the  $x, y$  plane) for a given rate of rainfall has been presented (CHILDS, 1945) and impediments to progress outlined. In Fig. (1) we show the equivalent of Gustafsson's Fig. (45) but with a finite drain diameter, and Fig. (2) is the corresponding hodograph, in which the curved path  $D_1E_1$  cannot be specified if the drain section  $DE$  has been initially defined. The hodograph of the free surface is the return path  $A_1B_1C_1$ ; again, the point  $B_1$  cannot be located. The usual method of applying the hodograph is to select arbitrarily parameters in the hodograph plane, and to await the solution before we discover the particular boundary conditions of the problem we happen to have been solving (e. g. MUSKAT, 1935; WEINIG and SHIELDS, 1936).

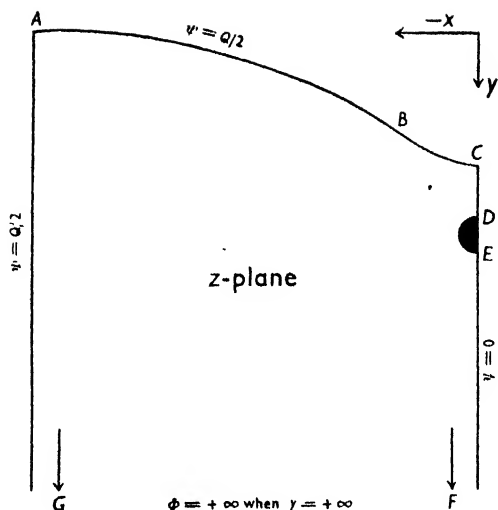


Fig. 1.

Gustafsson avoids the first uncertainty, i. e. as regards the path  $D_1E_1$ , by choosing the only drain for which the hodograph is at once known, namely a drain of diameter zero for which the potential  $\Phi$  must be negative and infinitely large, and at which the flow velocity must also be infinitely large, so that the points  $D_1$  and  $E_1$  retreat to infinity in the negative and positive directions of  $v_y$  respectively. If we follow him in this, and carry through his series of transformations, we get Fig. (3), which corresponds to his Fig. (49). The first point to notice is that, in practice we use drains of finite diameter and we could not, even if we would, maintain a drain potential of  $-\infty$ , since this would involve a pressure component of  $-\infty$ , which a water column cannot support. This limitation might not be serious, since, after completely solving the problem and obtaining the flow net, we might choose that equipotential which, at the ordinate  $x=0$ , satisfies the equation

$$\Phi = -g\varrho y$$

(where  $\varrho$  is the density of water) and identify it with the perimeter of a drain containing water at zero pressure (i. e. free water, the pressure datum being atmospheric pressure). It might, of course, transpire that no such equipotential could be found other than that which passes through the point C, and in any case a quite impracticable drain cross-section might result.

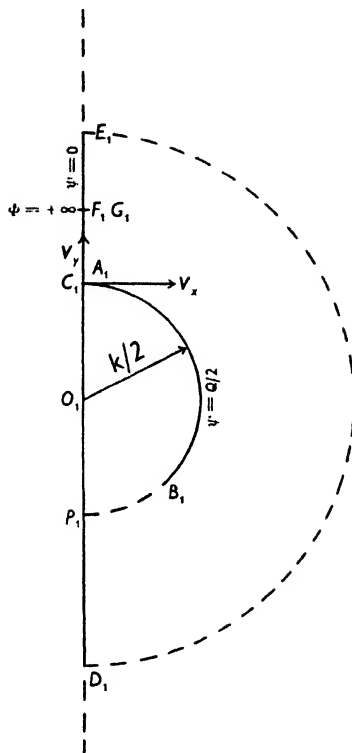


Fig. 2.

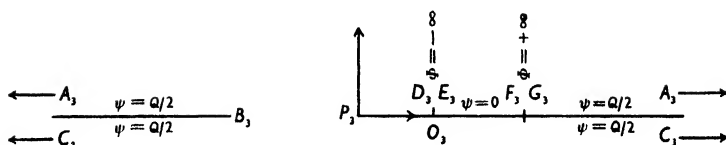


Fig. 3.

The second limitation of Gustafsson's analysis is more serious. It will be observed that the plane of Fig. (3) is a half-plane with a gap in it between the points  $P_3$  and  $B_3$ , with the consequence that the streamline  $\psi = Q/2$  (Gustafsson's nomenclature) is not the straight unbent line  $G_3A_3D_3$  but the contorted path  $G_3A_3B_3C_3O_3P_3D_3$ . In effect the field in the upper half plane leaks through the gap  $P_3B_3$  into the lower half plane, and complicates matters. Gustafsson avoids the difficulty by closing the gap; that is to say, he arbitrarily assigns the position of the point  $B_1$  in the hodograph to coincide with  $P_1$ , the intersection of the

semicircle with the axis of  $v_y$ . The solution is therefore the solution of one particular case only; by comparison with the results obtained by the method of electric analogues (CHILDS, 1943 et seq.) there is nothing to show that this particular case is not applicable to some actually occurring field cases except, perhaps, for minor inaccuracies immediately above the drainline. Nevertheless a complete solution demands that the gap  $P_0B_0$  shall be left open and dealt with; may we hope that Dr. Gustafsson may himself supply the last steps which will complete a beautiful analysis?

### References.

- CHILDS, E. C. 1943. The water-table, equipotentials and streamlines in drained land. *Soil Sci.* 56, 317-330.
- , 1945. The water-table, equipotentials etc. II. *Soil Sci.* 59, 319-327.
- GUSTAFSSON, Y. 1946. Untersuchungen über die Strömungsverhältnisse in gedräntem Boden. *Acta Agr. suecana.* 2, 1-157.
- MUSKAT, M. 1935. The seepage of water through dams with vertical faces. *Physics* 6, 402-415.
- WEDERNIKOV, V. V. 1936. Sur la solution du problème à deux dimensions du courant stationnaire des eaux souterraines à surface libre. *C. r. Acad. sci. Paris* 22, 1155-1157.
- WEINIG, F. & CHILDS, A. 1936. Graphisches Verfahren zur Ermittlung der Sickerströmung durch Staudämme. *Wasserkraft und Wasserwirtschaft.* 31, 233-240.

### Note added in proof.

Since this brief paper was written, Dr. V. V. WEDERNIKOV has drawn the author's attention to his own attack on the drainage problem (WEDERNIKOV, 1939). Unfortunately WEDERNIKOV's paper is very highly compressed.

- WEDERNIKOV, V. V. 1939. Sur la théorie du drainage. *C. r. Acad. sci. de l'URSS* 23, 335-337.







**Indian Agricultural Research Institute (Pusa)**  
**LIBRARY, NEW DELHI-110012**

This book can be issued on or before .....

Return Date	Return Date